



## 5. cvičení – Metrické prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### 1

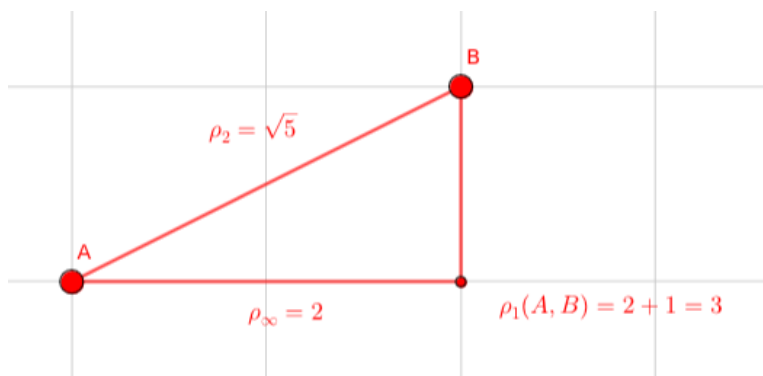
**Definice 1.** *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici  $(X, \rho)$ , kde  $X$  je množina,  $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  je funkce splňující

- (1)  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- (2)  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$ ,
- (3)  $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Funkci  $\rho$  nazýváme *metrika na  $X$* .

**Poznámka 2.** Množinu  $\mathbb{R}^n$  uvažujeme s metrikami

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$



**Úloha 3.** Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem (precizní důkaz není třeba)

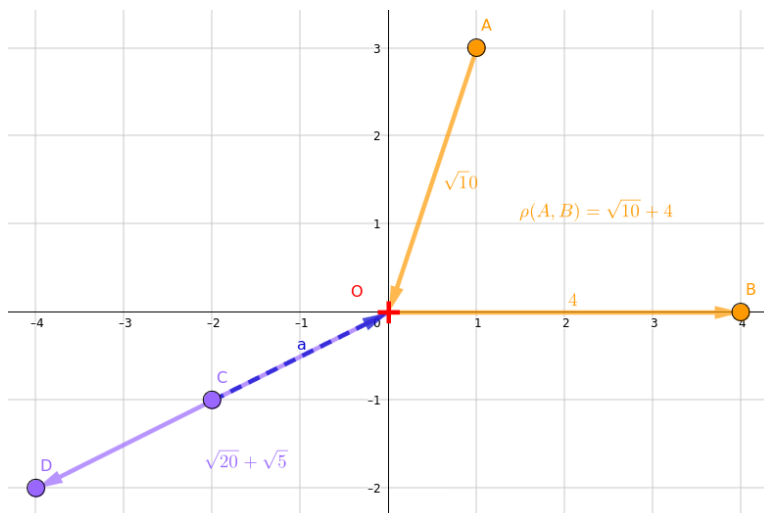
1. Na prostoru  $\mathbb{C}([0, 2])$  spojitých funkcí na  $[0, 2]$  uvažujme

$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$

2. Na  $\mathbb{R}$  uvažujme  $\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$

3. Prostor  $\mathbb{R}^2$  s funkcí  $\rho(x, x) = 0$ ,  $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$ ,  $x \neq y$ , kde  $x_0$  značí počátek  $(0, 0)$  a  $\rho_2$  značí eukleidovskou metriku v  $\mathbb{R}^2$ . Při měření vzdálenosti dvou různých bodů musíme vždy projít počátkem.

4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.



**Definice 4.** Necht  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subset X$ ,  $A \neq \emptyset$ , a  $x \in X$ . *Vzdáleností bodu  $x$  od množiny  $A$*  rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y); y \in A\}.$$

**Úloha 5.** ✳ Na  $\mathbb{R}^2$  najděte vzdálenost bodu  $P = [0, 1]$  od přímky  $y = -x$  v metrice

1.  $\rho_1$
2.  $\rho_2$
3.  $\rho_\infty$

Zdroj: [https://is.muni.cz/th/143424/fi\\_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx](https://is.muni.cz/th/143424/fi_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx)

**Úloha 6.** ✿ V prostoru  $\mathbb{C}([0, 1])$  uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce  $f(x) = x$  od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

Hejblátko v geogebra: <https://www.geogebra.org/calculator/veyfkgzhz>

Zdroj: <https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf>

**Poznámka 7.** Necht  $p \in [1, \infty)$  a  $l_p$  je množina všech reálných posloupností  $\{x_n\}$ , pro něž řada  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$  konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

**Poznámka 8.** Uvažujme množinu všech **omezených** reálných posloupností  $\{x_n\}$  Pak definujeme metriku

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

**Úloha 9.** ✿ Určete vzdálenost posloupnosti  $x = \{1, 2, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\}$  od množiny  $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$  v prostorech

1.  $l_1$ 2.  $l_2$ 3.  $l_\infty$ Zdroj: <https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf>

## 2

**Definice 10.** Necht  $x \in X$ ,  $r > 0$ . *Otevřenou kouli* rozumíme množinu

$$B(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$$

*Uzavřenou kouli* rozumíme množinu

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) \leq r\}$$

**Úloha 11.** Načrtněte jednotkovou kouli v prostoru  $(\mathbb{R}^3, \rho_1)$ ,  $(\mathbb{R}^3, \rho_2)$ ,  $(\mathbb{R}^3, \rho_\infty)$ .

**Úloha 12.** Jak vypadá koule v diskretním metrickém prostoru?

**Definice 13.** Necht  $(X, \rho)$  je metrický prostor a  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost prvků  $X$ . Řekneme, že  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  *konverguje* k  $y \in X$  v  $(X, \rho)$ , jestliže platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y) = 0$ . Prvek  $y$  nazýváme *limitou posloupnosti*  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  v  $(X, \rho)$ . *Konvergentní posloupností* v  $(X, \rho)$  rozumíme každou posloupnost prvků  $X$ , která má limitu v  $(X, \rho)$ .

**Definice 14.** Necht  $(X, \rho)$  je metrický prostor,  $M \subset X$ . Řekneme, že množina  $M$  je *uzavřená* v  $X$ , jestliže platí: pro každou posloupnost  $\{x_n\}$  v  $M$ , splňující  $x_n \rightarrow x$  pro nějaký prvek  $x \in X$ , pak platí:  $x \in M$ .

**Definice 15.** Necht  $M \subset X$ ,  $x \in X$ . Řekneme, že  $x \in X$  je *vnitřním bodem množiny*  $M$ , jestliže existuje  $r > 0$  splňující  $B(x, r) \subset M$ .

Množina  $M \subset X$  se nazývá *otevřená* v  $(X, \rho)$ , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

**Poznámka 16.** 1. Množina  $F$  v metrickém prostoru  $(X, \rho)$  je uzavřená právě tehdy, když  $X \setminus F$  je otevřená.

2. Množina  $G$  v metrickém prostoru  $(X, \rho)$  je otevřená právě tehdy, když  $X \setminus G$  je uzavřená.

**Úloha 17.** Určete, zda je interval  $(0, 1)$  otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru  $(X, \rho)$ , jestliže

1.  $X = (0, 1)$ ,  $\rho = \rho_1$ ,3.  $X = [0, 1]$  s diskretní metrikou,2.  $X = \mathbb{R}$ ,  $\rho = \rho_1$ ,4.  $X = (0, 1) \cup (3, 4)$ ,  $\rho = 3\rho_1$ .

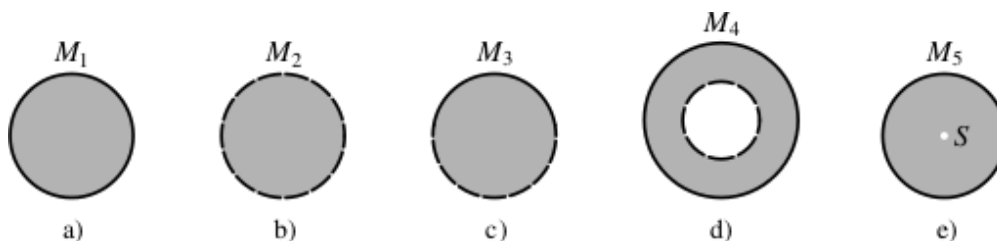
**Definice 18.** Necht  $M \subset X$ . Řekneme, že  $x$  je *hraničním bodem množiny*  $M$ , pokud pro každé  $r > 0$  platí  $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$  a  $B(x, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ . Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji  $\partial M$ .

*Uzávěrem* množiny  $M$  rozumíme množinu  $\bar{M} = M \cup \partial M$ .

**Úloha 19.** Určete, zda množina  $M$  je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v  $\mathbb{R}$  s eukleidovskou metrikou):

- |                 |                      |                            |
|-----------------|----------------------|----------------------------|
| 1. $M = (0, 1)$ | 3. $M = (0, 1]$      | 5. $M = [0, \infty)$       |
| 2. $M = [0, 1]$ | 4. $M = (0, \infty)$ | 6. $M = (-\infty, \infty)$ |
| 7. $\mathbb{N}$ | 8. $\mathbb{Q}$      | 9. $\mathbb{R}$            |

**Úloha 20.** Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v  $\mathbb{R}^2$ ).



**Úloha 21.** Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\clubsuit \overline{B(x, r)} = \overline{B(x, r)}$ | 2. $\star \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
|--|---|

**Úloha 22.** Najděte uzávěry grafů funkcí

- |    |   |                        |
|----|---|------------------------|
| 1. | $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | 2. Dirichletova funkce |
|    |   | 3. Riemannova funkce   |

<https://www.geogebra.org/calculator/zapw8zma>

[https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichletova\\_funkce](https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichletova_funkce)

[https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannova\\_funkce](https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannova_funkce)

**Úloha 23.** Najděte netriviální  $A \subset \mathbb{R}$ , aby splňovala následující

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\overline{A} = \partial A$             | 4. $\overline{\text{Int } A} \subsetneq A$ |
| 2. $\text{Int } \overline{A} \supsetneq A$ | 5. $\overline{\text{Int } A} \supsetneq A$ |
| 3. $\text{Int } \overline{A} \subsetneq A$ | 6. $\overline{\text{Int } A} = A$          |

(5) Nakreslete si obrázek, jak se vlastně měří vzdálenost v daných metrikách?  
 (6) Použijte hejblátka.  
 (6) Vzdálenost dvou bodů je nejmenší, když jsou přesně stejné. To tady asi nepůjde, ale nemohly by být stejné skoro na všech souřadnicích?  
 (21.1) Uvažujte  $\mathbb{R}^2$  bez mezikruží.  
 (21.2) Uvažujte  $(0, 1)$  a  $(1, 2)$ .