



### 3. cvičení – Limity funkcí více proměnných

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

#### Příklady – definiční obor

1. Určete definiční obor a načrtněte (příklady ze zkoušek)

(a)  $f(x, y) = \arcsin(x + y) + \arctan(x + y) + xy$

**Řešení:**

Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

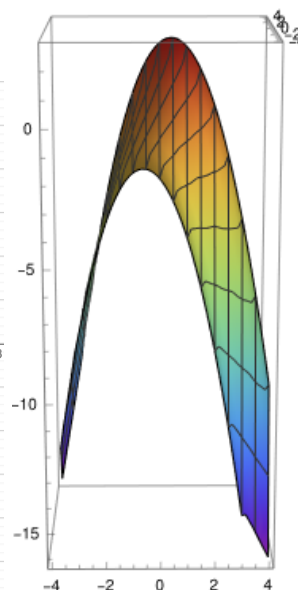
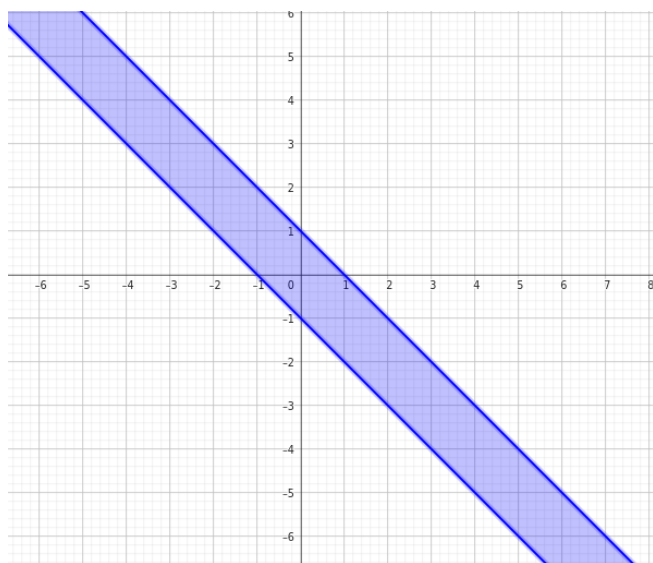
$$-1 \leq x + y \leq 1$$

tedy

$$y \leq 1 - x, \quad -1 - x \leq y.$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x, -1 - x \leq y.\}$$



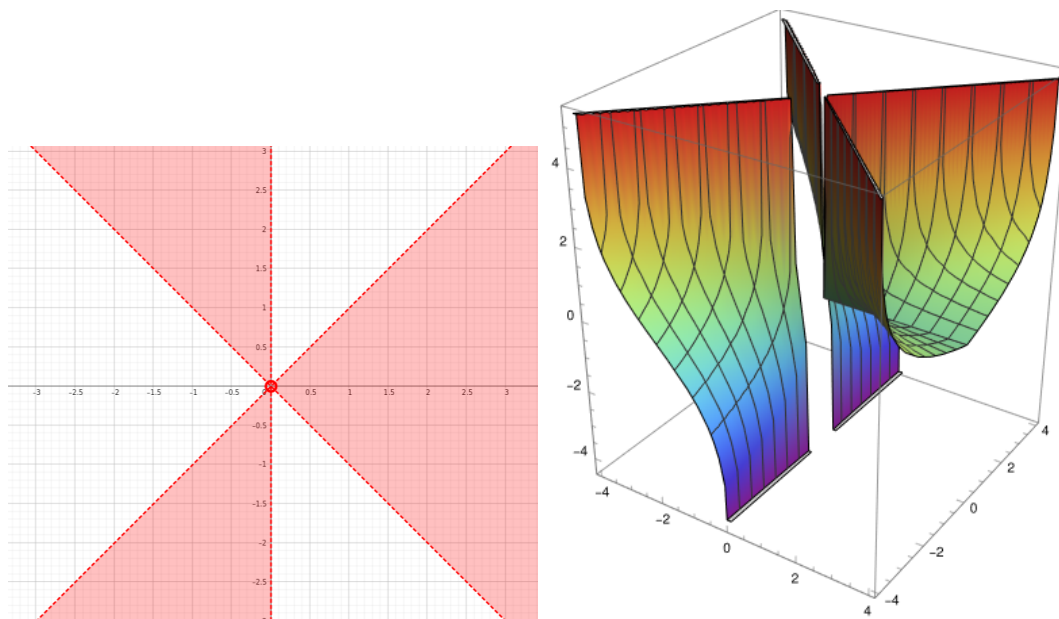
(b)  $f(x, y) = \log\left(\frac{x}{|x| - |y|}\right)$

**Řešení:** Máme podmínky

$$x \neq 0, \quad |x| \neq |y|, \quad \frac{x}{|x| - |y|} > 0$$

Tedy získáme nerovnice

$$(x > 0 \wedge |x| - |y| > 0) \vee (x < 0 \wedge |x| - |y| < 0).$$



Závěr:

$$D_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, |x| \neq |y|, \frac{x}{|x| - |y|} > 0 \right\}$$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

**Řešení:** Podmínky:

$$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$$

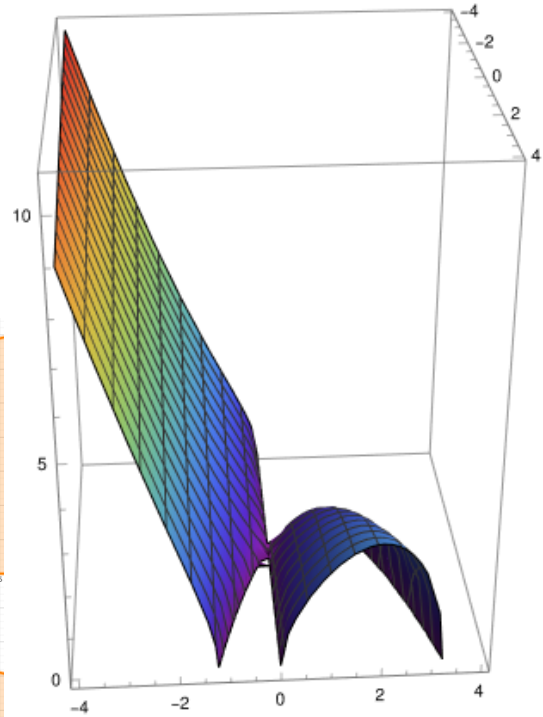
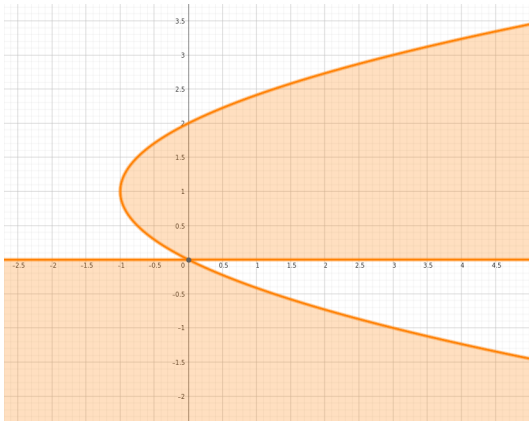
Tedy

- $y = 0, x \in \mathbb{R}$ , nebo
- $x = y^2 - 2y$ , nebo
- $x \geq y^2 - 2y \wedge y \geq 0$ , nebo
- $x \leq y^2 - 2y \wedge y \leq 0$ .

Navíc lze upravit  $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$ .

Závěr:

$$D_f = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : y(x - y^2 + 2y) \geq 0 \}$$



(d)  $f(x, y) = \arcsin \sqrt{x(x+y)}$

**Řešení:** Podmínky

$$0 \leq x(x+y) \leq 1$$

Tedy

- $x \geq 0 \wedge y \geq -x$ , nebo
- $x \leq 0 \wedge y \leq -x$ , nebo
- $x = 0, y \in \mathbb{R}$ , nebo
- $y = -x$ .

Zároveň musí být splněno

$$x(x+y) \leq 1$$

$$x^2 + xy \leq 1$$

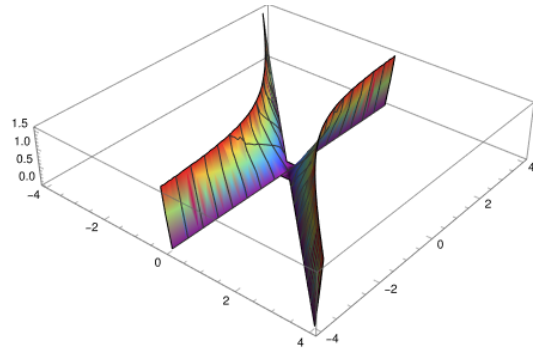
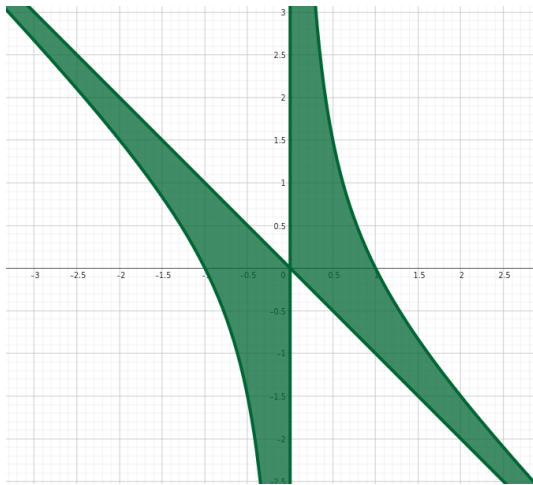
$$xy \leq 1 - x^2$$

Tedy

- $x = 0, y \in \mathbb{R}$ , nebo
- $x > 0 \wedge y \leq \frac{1}{x} - x$ , nebo
- $x < 0 \wedge y \geq \frac{1}{x} - x$ .

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x(x+y) \leq 1\}$$



### Příklady – limity, které ilustrují různé situace

2. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

(a) Ukažte, že pro funkci  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1$$

a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

**Řešení:**

Nejprve vypočteme obě dvojnásobné limity. Uvědomme si, že vnitřní limitu přes  $y$  (resp.  $x$ ) nám stačí počítat pro hodnoty parametru  $x$  (resp.  $y$ ) různé od limitního bodu, tj. v našem konkrétním případě pro  $x \neq 0$  (resp.  $y \neq 0$ ).

Platí, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru“  $x$  různou od nuly je funkce (proměnné  $y$ ) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení  $y = 0$  máme

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-0}{x+0} \right) = 1.$$

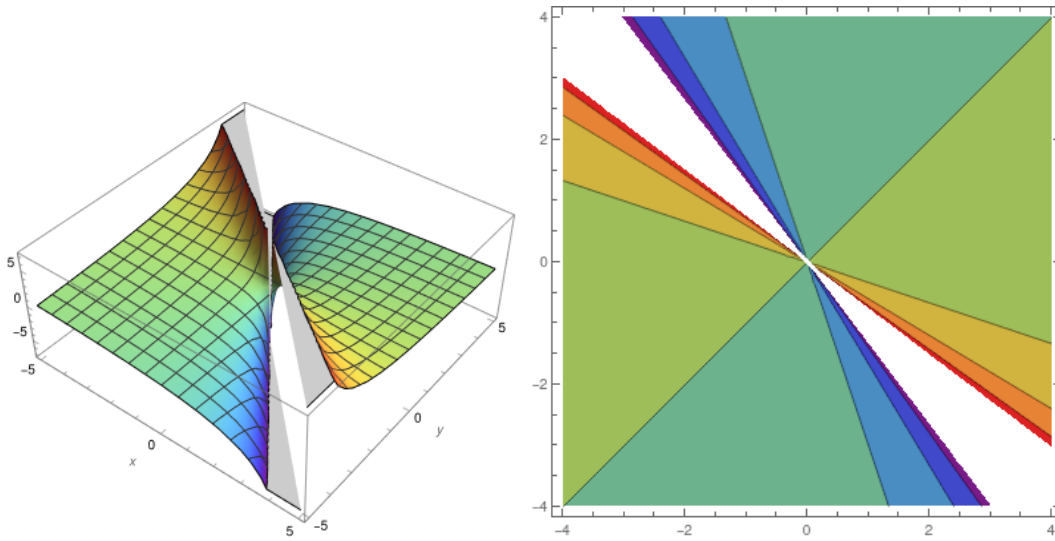
Obdobně vypočteme

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru“  $y$  různou od nuly je funkce (proměnné  $x$ ) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení  $x = 0$  máme

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0-y}{0+y} \right) = -1.$$

Protože dvojnásobné limity existují a nerovnaj se, nemůže dvojnásobná limita existovat.



(b) Ukažte, že pro funkci  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

**Řešení:**

Vypočteme nejprve dvojnásobné limity. Uvědomme si, že funkce  $f(x, y)$  je jako funkce proměnné  $y$  pro pevnou hodnotu  $x \neq 0$  spojitá pro všechna  $y \in \mathbb{R}$ , speciálně v bodě nula. Máme tedy, že pro  $x \neq 0$  je

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = 0.$$

Proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0.$$

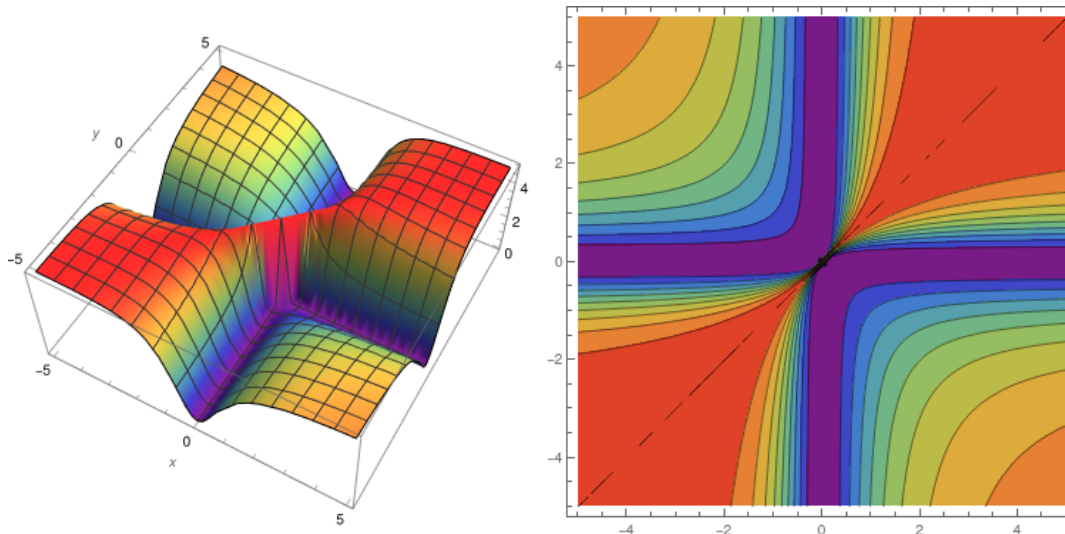
Obdobně dostaneme, že

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{0}{0 + (0 - y)^2} \right) = 0.$$

Určeme nyní limitu po přímce  $y = x$  pro  $x \rightarrow 0$  (potom samozřejmě také  $y \rightarrow 0$ ). Máme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2 \cdot x^2 + (x - x)^2} = 1,$$

a protože limita po přímce  $y = x$  a dvojnásobné limity existují a nejsou shodné, dvojnásobná limita nemůže existovat.



(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}$

**Řešení:**

Vypočtěme nejprve dvojnásobné limity. Pro  $x \neq 0$  máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Pro  $y \neq 0$  analogicky

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

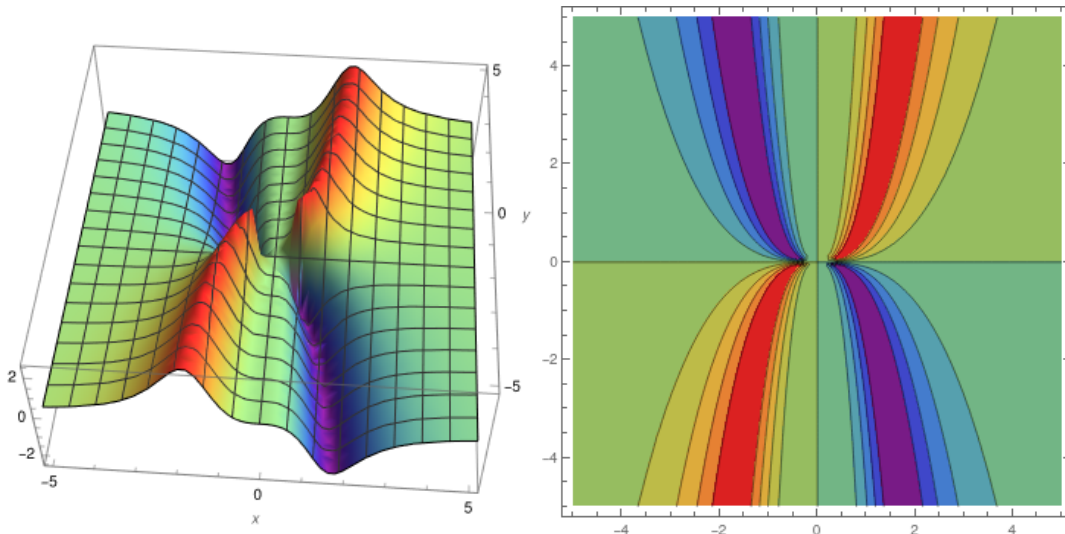
Nyní limita po přímce  $y = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 kx}{x^6 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \frac{kx^2}{x^4 + k^2} = 0.$$

Zkusme křivku  $y = x^3$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 x^3}{x^6 + (x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.



(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow [0,0]} x \frac{xy}{x^2 + y^2}$

**Řešení:** Použijeme nápovědu  $\pm 2xy \leq x^2 + y^2$ . Pak máme

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

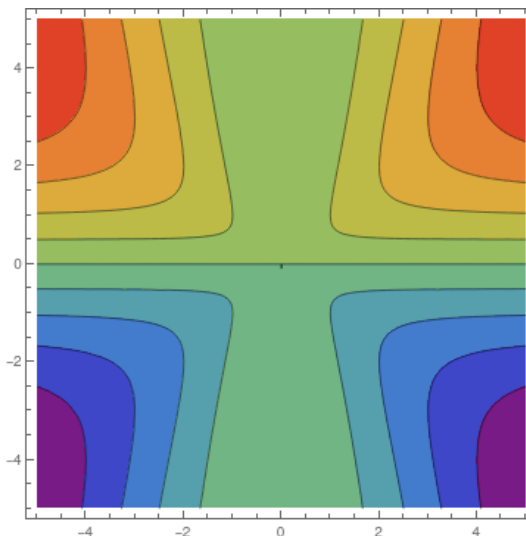
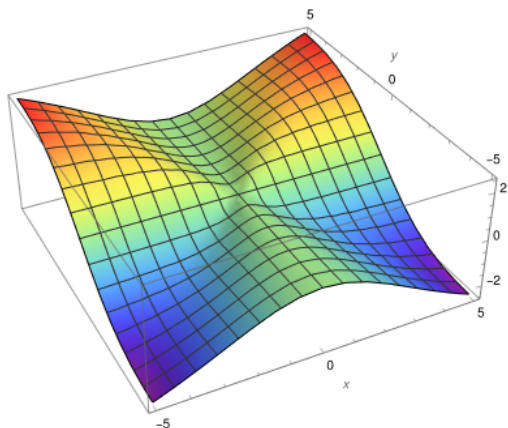
$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \geq -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$

Navíc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow [0,0]} x = 0,$$

tedy z věty o omezené a mizející máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow [0,0]} x \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$$



$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}$$

**Řešení:**

Zkusíme aplikovat známé limity a aritmetiku limit, tedy:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{1}{x^2}$$

Ze spojitosti máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}.$$

Zbývá první limita. Pro funkce jedné proměnné platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1.$$

Navíc (ze spojitosti)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \sqrt{(x-4)^2 - y^2} = 0$$

Pokud ověříme podmínky, tak z věty o limitě složené funkce budeme mít

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = 1$$

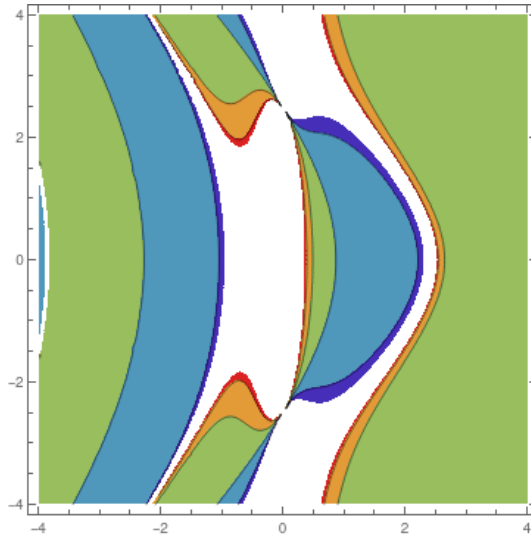
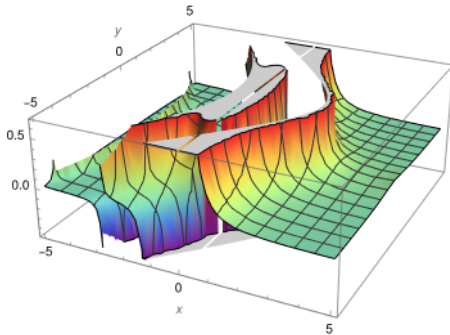
a dohromady

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = \frac{1}{16}.$$

Podmínky, konkrétně podmínka (P) (vnitřní funkce se vyhýbá své limitě): hledáme okolí bodu  $(4, 0)$  takové, aby

$$\sqrt{(x-4)^2 - y^2} \neq 0.$$





Navíc se pohybujeme pouze na množině  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 - y^2 > 0\}$  - to je kvůli definičnímu oboru funkce v limitě.

Požadavek  $\sqrt{(x - 4)^2 - y^2} > 0$  je ale splněn např. na  $B((4, 0), 1) \cap A$ , tedy jsme ověřili podmínku (P) a jsme hotovi.

(f) Ukažte, že pro funkci  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{neexistují,}$$

ale

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  vzhledem k definičnímu oboru funkce  $f$  existuje a je rovna nule.

**Řešení:**

UVědomme si, že pro žádné  $x \neq \frac{1}{\pi k}$  pro  $k \in \mathbb{Z}$  neexistuje limita

$$\lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

Formálně to lze nahlédnout pomocí Heineho věty. Volme-li  $y_n = 1/2\pi n$ , potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x + y_n) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{2\pi n} \right) \sin \frac{1}{x} \sin(2\pi n) = 0,$$

zatímco pro volbu  $y_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$  je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x + y_n) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \right) \sin \frac{1}{x} \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) = (x + 0) \sin \frac{1}{x} \neq 0.$$

Tudíž nemůže existovat ani dvojnásobná limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right),$$

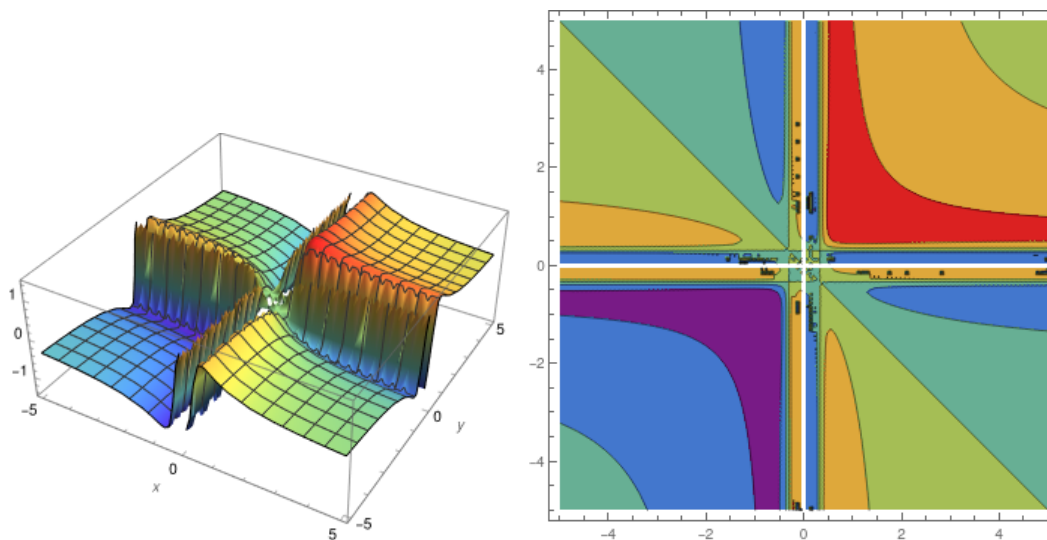
protože vnitřní limita není definována na žádném intervalu hodnot  $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ . Ze stejného důvodu neexistuje ani druhá z dvojnásobných limit. Naopak dvojná limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

To proto, že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) = 0+0=0,$$

neboť polynom  $(x+y)$  je spojitá funkce, a dále protože, že funkce  $\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  je omezená. Tudíž podle věty o omezené a mizející, je výsledek roven 0.



3. Shrňte, jaké situace jsme zatím potkali. (Např. existuje dvojná limita, ale neexistuje limita; existují limity po přímkách, ale limita neexistuje; . . .)

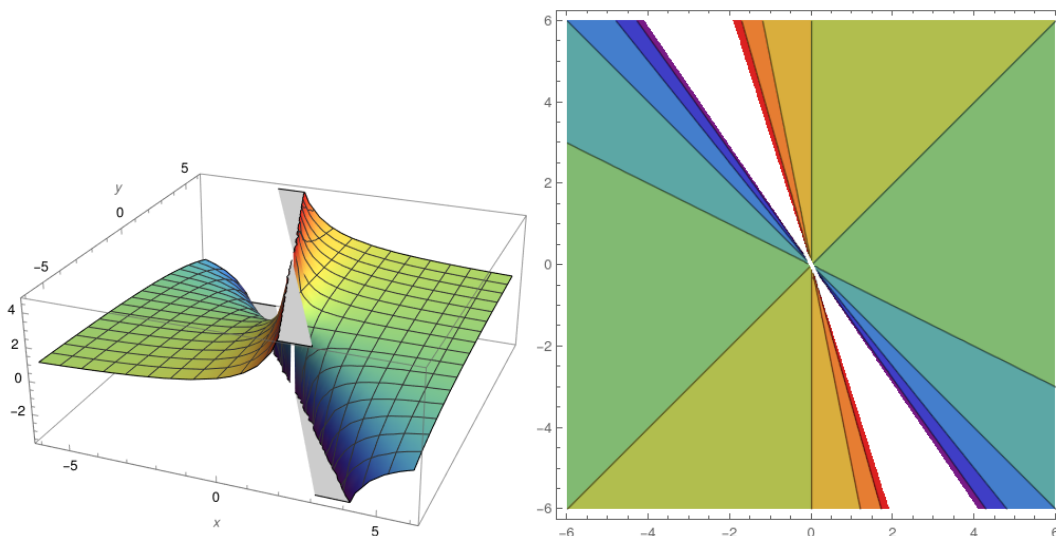
## Příklady – limity na procvičení

4. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

(a)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}$

**Řešení:** Funkce je spojitá, po dosazení

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$



(b)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{xy + 2x + y + 2}{xy^2 + y^2 + x + 1}$

**Řešení:** Vytkneme

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{xy + 2x + y + 2}{xy^2 + y^2 + x + 1} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{x(y+2) + (y+2)}{y^2(x+1) + (x+1)} = \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{(x+1)(y+2)}{(y^2+1)(x+1)} \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{(y+2)}{(y^2+1)} = 2 \end{aligned}$$

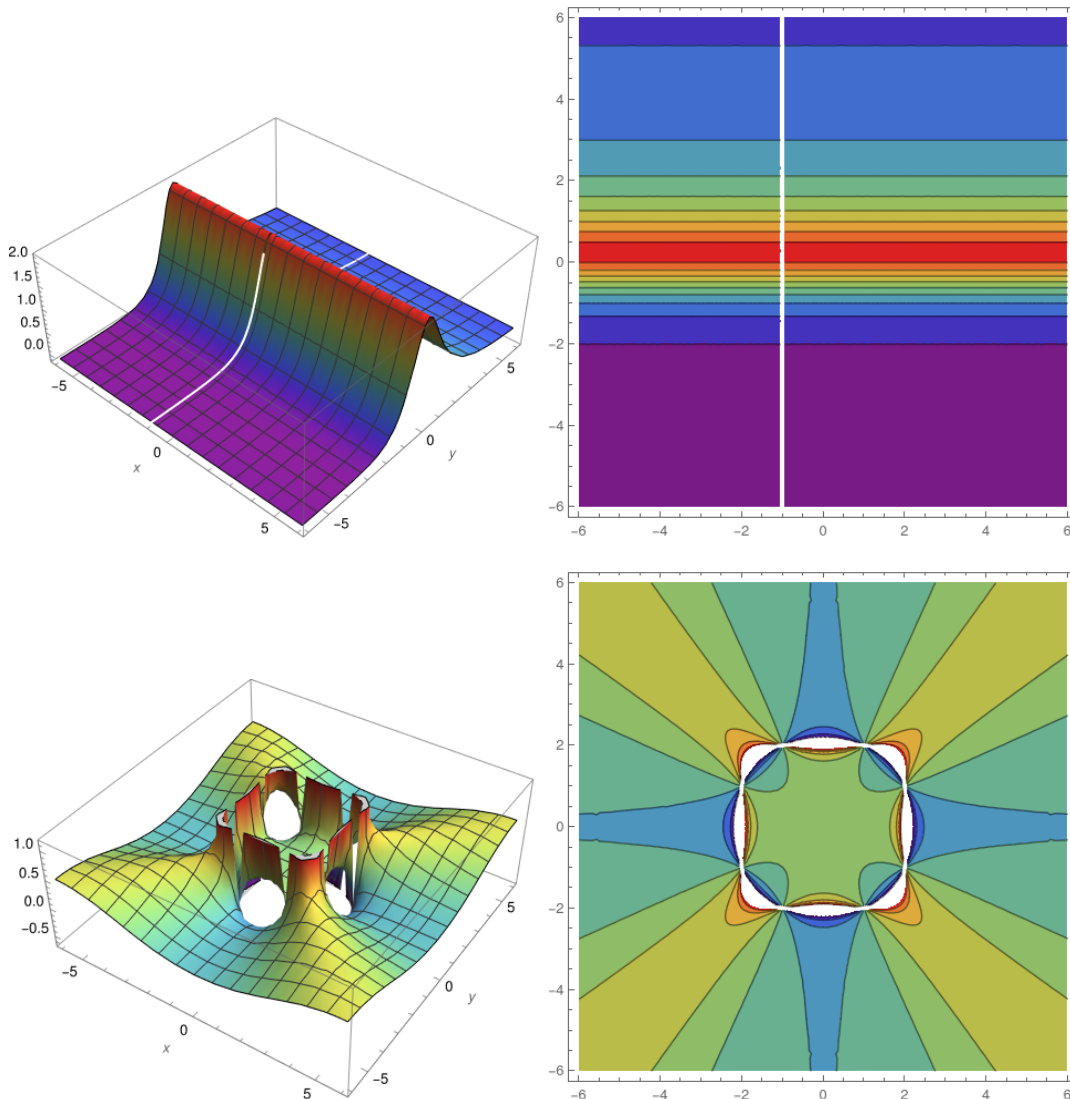
(c)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x^2y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17}$

**Řešení:** Spočteme dvojnásobné limity

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \lim_{y \rightarrow 2} \frac{x^2y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = 2$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} \left( \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right) = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 - 4}{y^4 - 16} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 - 4}{(y^2 - 4)(y^2 + 4)} = \frac{1}{8}$$

Jelikož obě dvojnásobné limity existují, ale nerovnájí se, tak původní limita neexistuje.



(d)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} \frac{\tan xy}{y}$

**Řešení:** Myšlenka: Rozšíříme a pak aplikujeme VOLSFS a známou limitu:

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} \frac{\tan xy}{y} = \lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} x \frac{\tan xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Technické provedení:

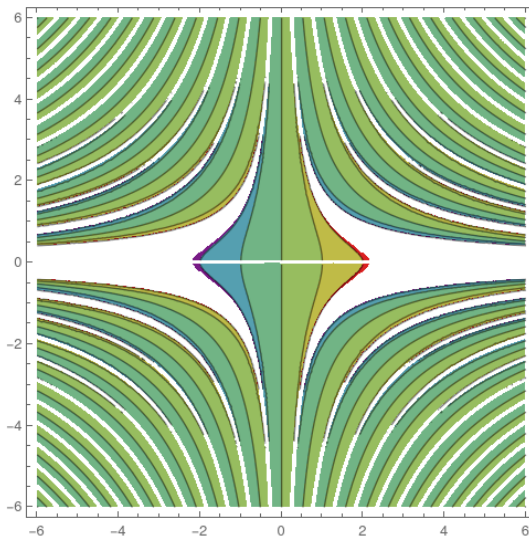
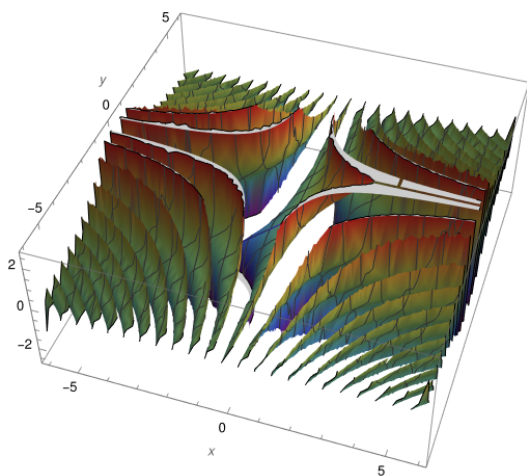
Funkce  $f(x, y) = \frac{\tan xy}{y}$  je definovaná na množině  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, 0], x \in \mathbb{R}\}$ . Počítáme tedy limitu vzhledem k  $M$ .

VOLSFS aplikujeme na funkci:  $g(x, y) = \frac{\tan xy}{xy}$ , kterou lze rozložit na funkce  $g_1(t) = \frac{\tan t}{t}$  a  $g_2(x, y) = xy$ .

Pak máme  $\lim_{t \rightarrow 0} g_1(t) = 1$  a  $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} xy = 0$ .

Podmínka (P): funkce  $xy \neq 0$  na okolí  $M \cap B([2, 0], 1) \setminus \{[2, 0]\}$ .

(e)  $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x \sin \frac{1}{x-y+z}$



**Řešení:** Použijeme větu o součinu omezené a mizející funkce. Máme

$$\left| \sin \frac{1}{x - y + z} \right| \leq 1$$

a ze spojitosti

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x = 0.$$

Dohromady

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x \sin \frac{1}{x - y + z} = 0$$

DOPLNIT

(f)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

**Řešení:** Užijeme odhady

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2$$

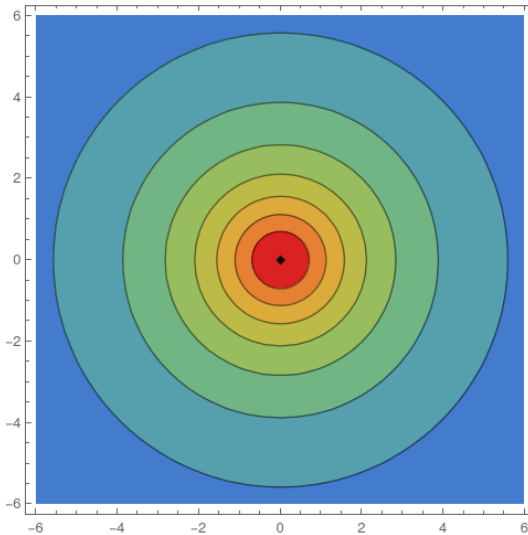
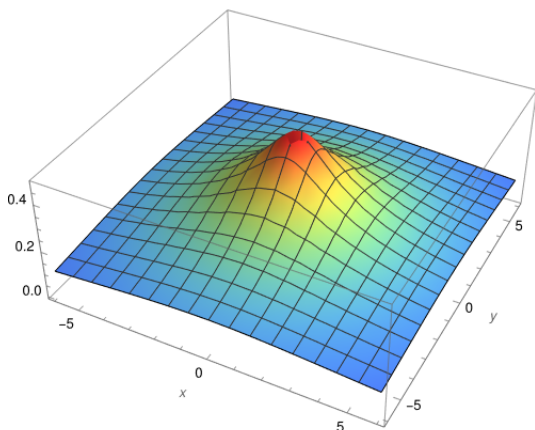
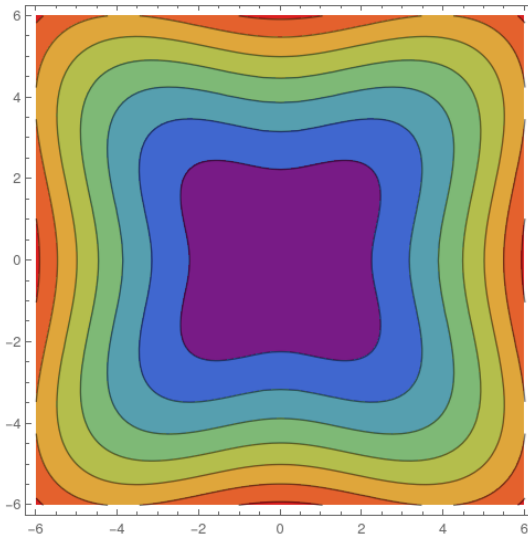
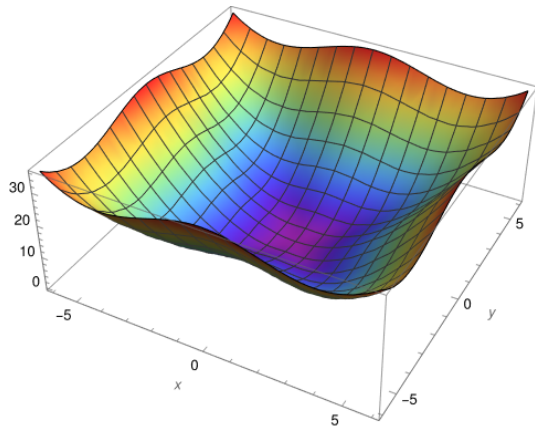
Ze dvou policajtů máme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

(g)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

**Řešení:** Rozšíříme dle vzorce

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 + y^2 + 1 - 1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



(h)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2}$

**Řešení:** Funkce vypadá, že je neomezená. Ukážeme z definice. Zvolme  $K > 0$ . K němu najdeme  $\delta = 1/K$ . Pak pro  $(x, y)$ :  $x^2 + y^2 < \delta$  máme

$$\frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{1}{\delta} = K,$$

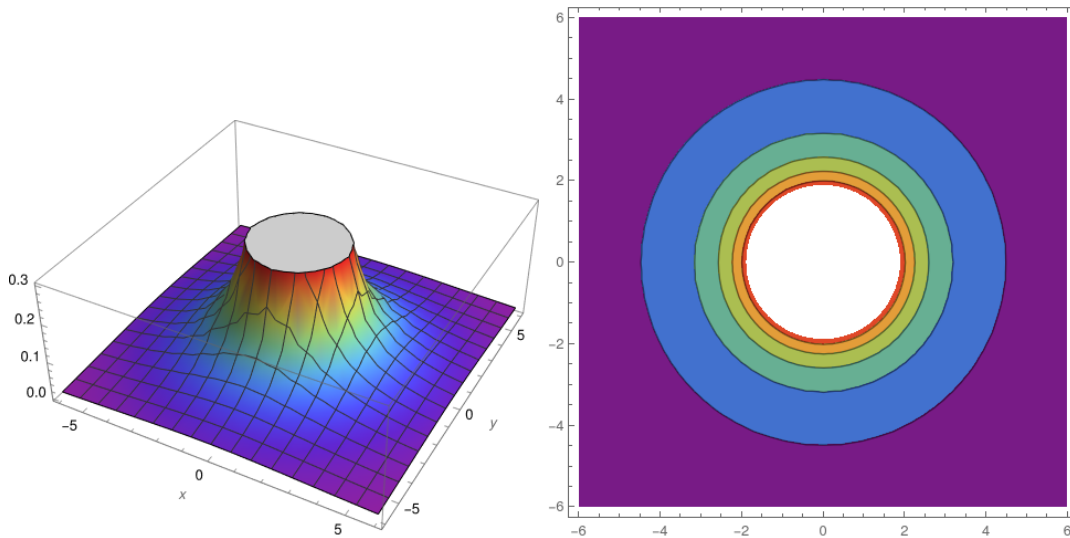
tedy

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$$

(i)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$

**Řešení:** Spočteme limitu po přímce  $y = x$ . Dostáváme

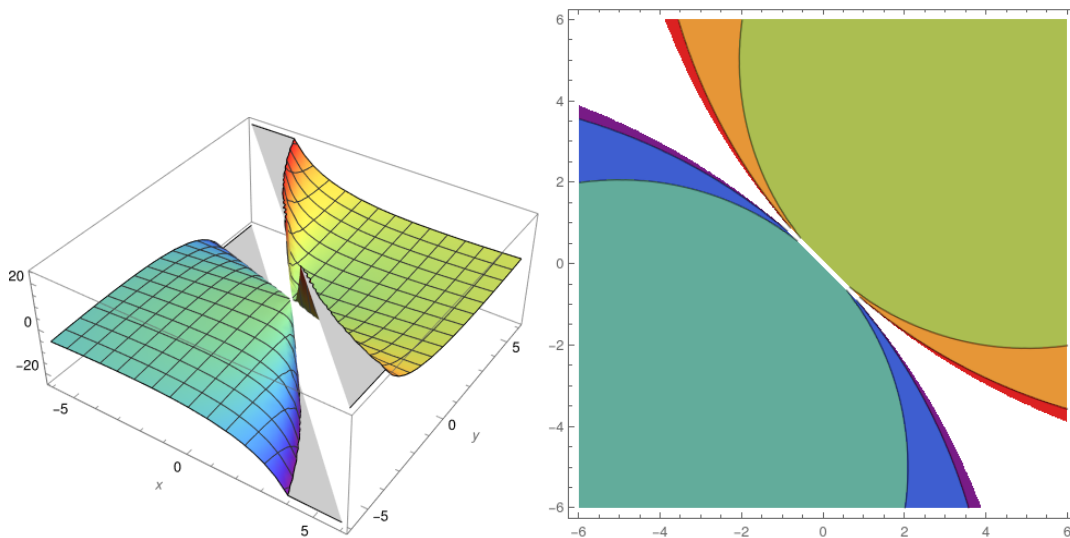
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x} = 0.$$



Ale pro křivku  $y = -x + x^2$  máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (-x + x^2)^2}{x + (-x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2 - 2x^3 + x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 - 2x + x^2 = 2.$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.



$$(j) \lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \left( 1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|} \right)^{|x| + |y| + |z|}$$

**Řešení:**

Použijeme VOLSF.

Vnitřní funkce  $|x| + |y| + |z|$ , vnější  $(1 + \frac{2}{t})^t$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2}{t} \right)^t = \lim_{t \rightarrow 0} e^{t \log(1 + \frac{2}{t})} = e^0 = 1.$$

Tuto limitu spočteme pomocí l'Hospitala:

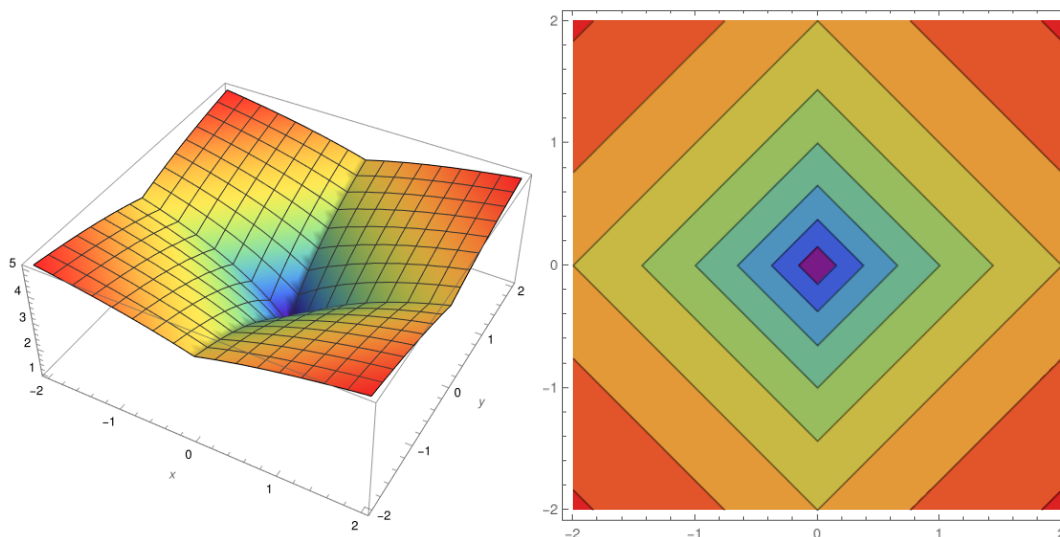
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t \log \left( 1 + \frac{2}{t} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \left( 1 + \frac{2}{t} \right)}{\frac{1}{t}} \stackrel{\text{L'H}}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\left(1 + \frac{2}{t}\right)} \cdot \frac{-2}{t^2}}{\frac{-1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{t}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{t + 2} = 0 \end{aligned}$$

Podmínka (P):  $|x| + |y| + |z| \neq 0$  na  $B([0, 0, 0], 1) \setminus \{[0, 0, 0]\}$ .

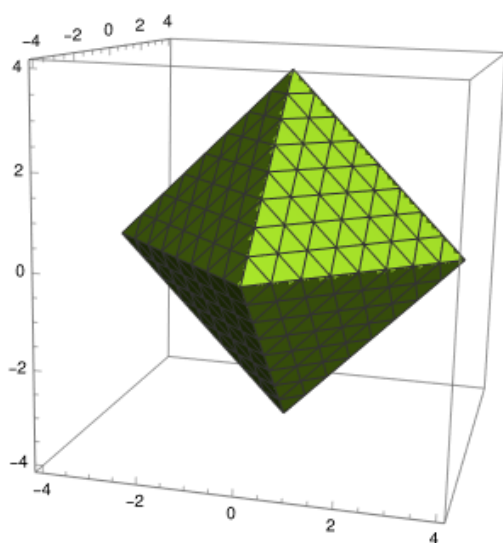
Dohromady

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \left( 1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|} \right)^{|x| + |y| + |z|} = 1$$

Pro 2D by graf vypadal následovně



Vrstevnicové plochy





$$(k) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}$$

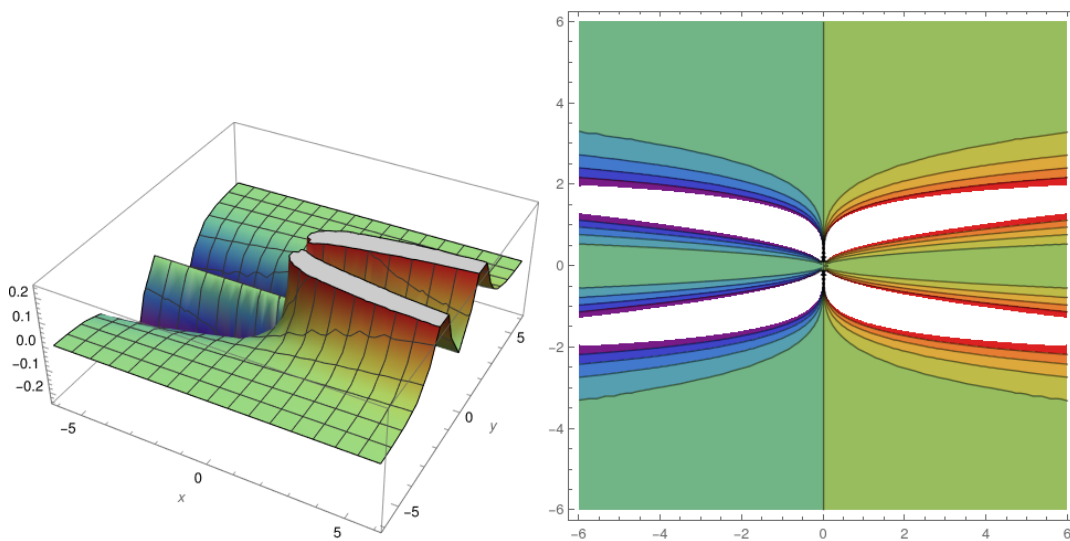
**Řešení:** Spočteme limitu po přímce  $y = x$ . Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{x^2 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + x^4} = 0.$$

Ale pro křivku  $y = \sqrt[3]{x}$  máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \cdot x^{2/3}}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{5/3}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2x^{1/3}} = \infty$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.



$$(l) \lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Řešení:**

Otestujeme křivku  $y = z = x$ , máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{1}{3}.$$

Pro křivku  $y = z = 0$ , máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

Tedy limita neexistuje.

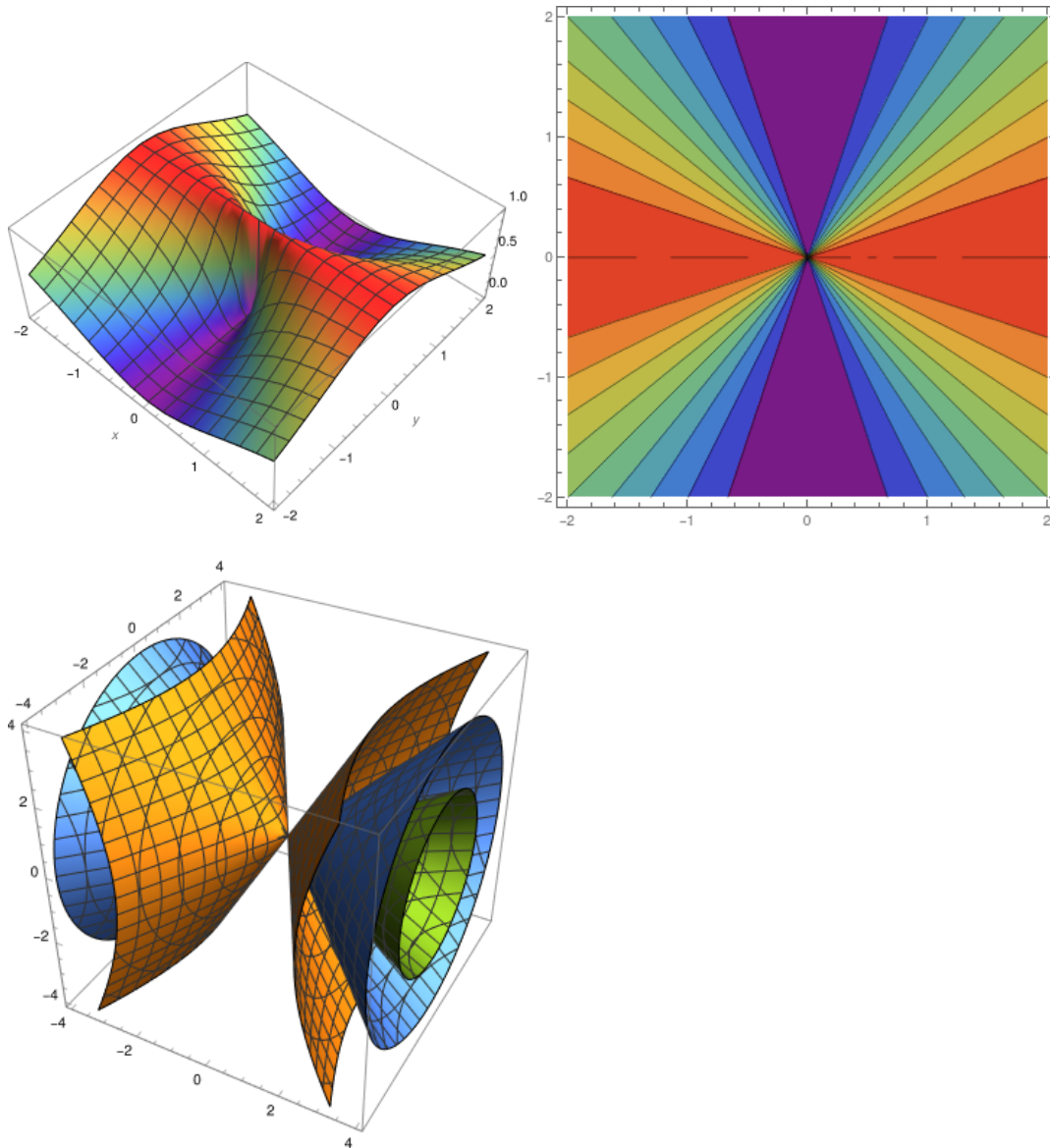
Pro 2D (bez  $z^2$ ) by graf vypadal následovně

Vrstevnicové plochy

$$(m) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Použijeme odhad  $|\sin t| \leq |t|$  a  $2|xy| \leq x^2 + y^2$ . Pak máme

$$\left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$



A protože ze spojitosti

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

máme ze dvou policajtů i

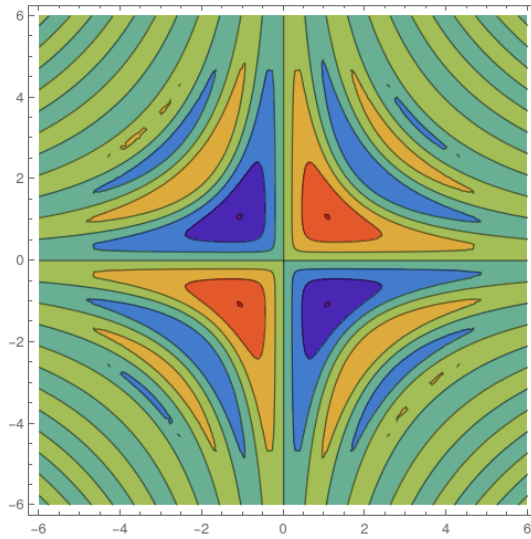
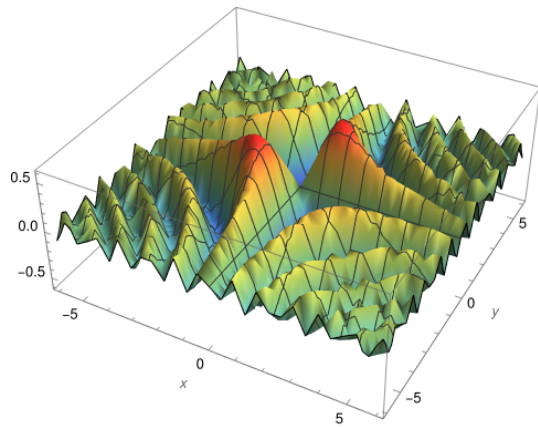
$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

(n)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

**Řešení:**

Otestujme přímky  $y = 0$  a  $y = x$ . Dostáváme

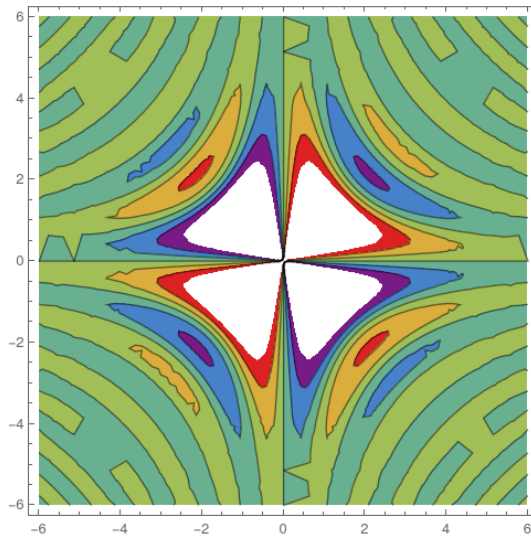
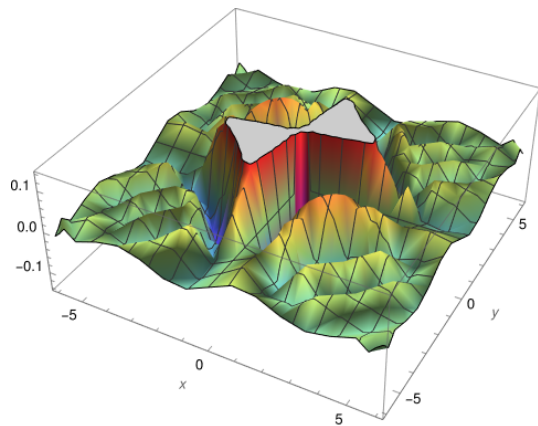
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot 0)}{x^2 + 0^2} = 0$$



a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.



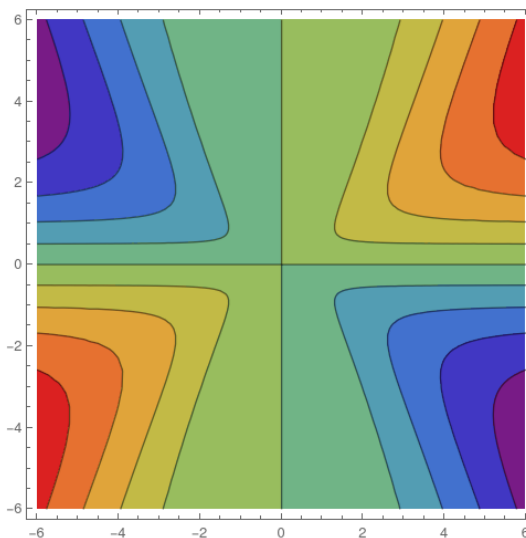
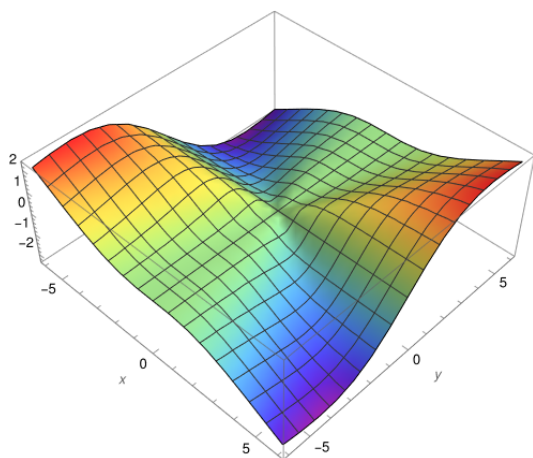
$$(o) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

**Řešení:** Použijeme odhady

$$\frac{|x^3y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

Dostáváme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$



(p)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{y^4 - xy^2}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$

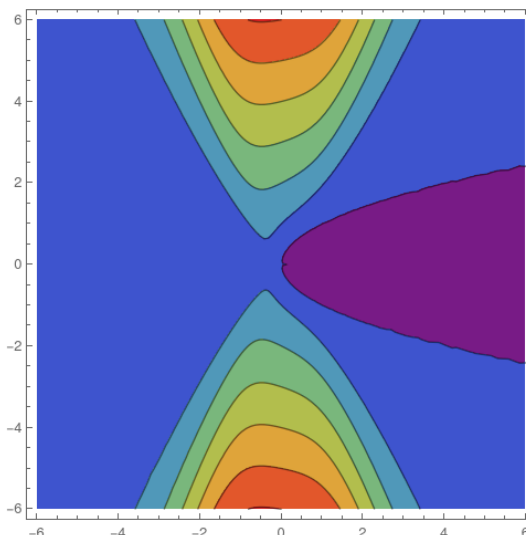
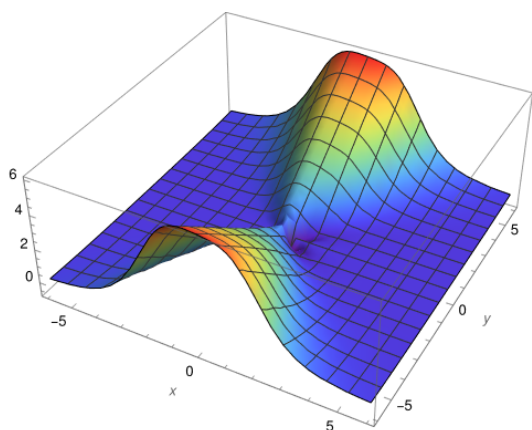
**Řešení:** Otestujeme křivky  $y = 0$  a  $y = x$ . Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0^4 - x \cdot 0^2}{(x^4 + 0^2)\sqrt{x^2 + 0^2}} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - x \cdot x^2}{(x^4 + x^2)\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - x^3}{(x^4 + x^2)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Tedy limita neexistuje.



(q)  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2y(|x| + |y|)}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$

**Řešení:**

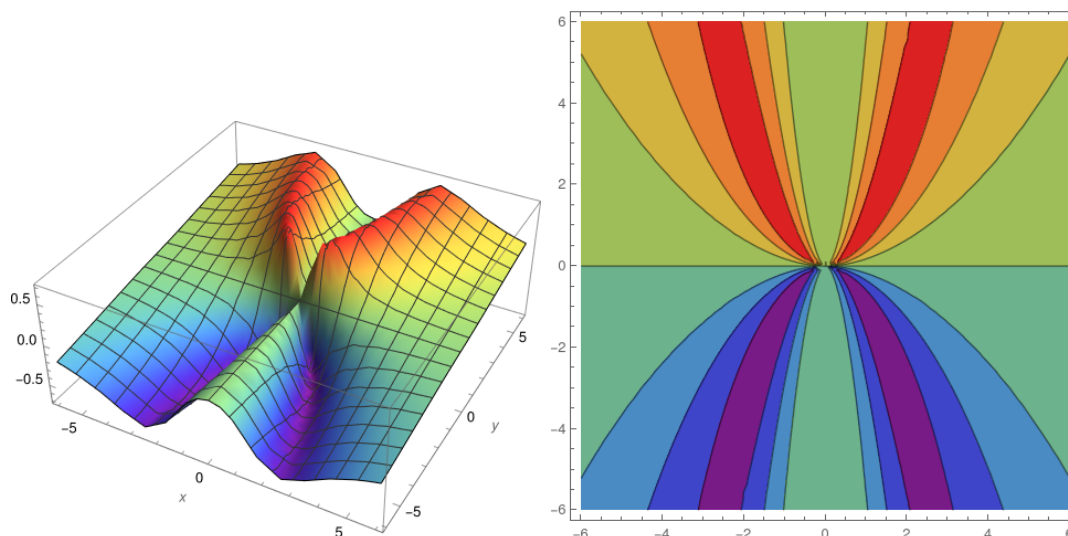
Otestujeme křivky  $y = 0$  a  $y = x^2$ . Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 0 (|x| + |0|)}{(x^4 + 0^2) \sqrt{x^2 + 0^2}} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 x^2 (|x| + |x^2|)}{(x^4 + x^4) \sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x^2}{2\sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.



5. Projděte si znovu sekci Shrnutí a Algoritmus. Zpracujte jej do nějakého (pro Vás) vhodného formátu. Např. Tabulka, Myšlenková mapa, Rozhodovací strom...