



3. cvičení – Limity funkcí více proměnných

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie – definice a věty

Definice 1. Nechtě (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení, $M \subset X$ a $a \in X$ je hromadným bodem množiny M . Řekneme, že prvek $b \in Y$ je *limitou zobrazení f v bodě a vzhledem k množině M* , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M, x \neq a : \rho(x, a) < \delta \implies \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Věta 2 (Heine). Nechtě (X, ρ) , (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$, $M \subset X$, $a \in M'$, $b \in Y$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) = b$$

právě tehdy, když: pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset M \setminus \{a\}$ platí

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow b.$$

Věta 3 (Aritmetika limit). Nechtě (X, ρ) je metrický prostor, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset X$, $a \in M'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nechtě $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) = \alpha$ a $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} g(x) = \beta$. Pak

1. $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$
2. $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$
3. $\lim_{x \rightarrow a, x \in M} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$, pokud $\beta \neq 0$.

Věta 4 (O limitě složeného zobrazení). Nechtě (X, ρ) , (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $g : X \rightarrow Y$, $f : Y \rightarrow Z$. Nechtě $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a nechtě platí:

1. $\exists \delta > 0 : g(P(a, \delta) \cap A) \subset B$
2. $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = b$
3. $\lim_{y \rightarrow b, y \in B} f(y) = c$

Nechtě platí jedna z podmínek

$$(P) \exists \eta > 0 : b \notin g((P(a, \eta) \cap A))$$

(S) zobrazení f je spojitě v bodě b vzhledem k B .

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(g(x)) = c.$$

Věta 5 (2 policajti). Nechtě existuje prstencové okolí $P(x_0, y_0)$ takové, že na $P(x_0, y_0)$ platí

$$h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y).$$

Nechtě dále

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} h(x, y) = L = \lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} g(x, y),$$

$L \in \mathbb{R}$. Pak také existuje

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x, y) = L.$$

Věta 6 (Omezená a mizející). Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a a buď hromadným bodem množiny M . Necht' f je omezená funkce na průniku nějakého prstencového okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a množiny M a necht'

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} g(x) = 0.$$

Potom

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x)g(x) = 0.$$

Poznámka 7 (O dvojnásobné limitě). Pokud existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) = L_1$ a $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) = L_2$ a $L_1 \neq L_2$, tak limita $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y)$ neexistuje. (Opačné tvrzení neplatí.)

Poznámka 8 (O dvojnásobné limitě 2). Pokud existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) = L_1$, $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) = L_2$ a $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y) = L$, pak $L = L_1 = L_2$.

Věta 9 (O absolutní hodnotě). 1. Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M . Jestliže

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L, \quad \text{potom} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} |f(x)| = |L|.$$

2. Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M . Potom

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = 0, \quad \text{právě když} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} |f(x)| = 0.$$

Shrnutí – Co máme k dispozici:

1. Je funkce v daném bodě spojitá? → Lze **dosadit**.
2. Jde o polynom 0/0? → Možná půjde něco **vytknout** a pokrátit.
3. Jsou tam odmocniny? → Zkusme použít **vzorce**, např. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
4. Vypadá to na známou limitu? → **VOLSF**.
5. Je tam omezená (sin, cos, ...) krát nulová? → Věta o **omezené a mizející**.
6. Dvojnásobné limity existují, ale jsou různé? → Limita **neexistuje**.
7. Limity po přímkách $y = kx$ vyjdou různé? → Limita **neexistuje**.
8. Limity po dalších křivkách ($y = kx^2$, $y = kx^3$, ...) vyjdou různé? → Limita **neexistuje**.
9. Vyskytuje se tam hodně $x^2 + y^2$? → Možná to půjde z **definice**. Jestliže $x^2 + y^2 < \delta$, jak vypadá $f(x, y)$?
10. Nelze použít nějaký odhad? → **Dva policajti**.

Algoritmus:

1. První pohled na funkci:

(a) Je **spojitá**?

- (b) Vypadá to na **známou limitu**?
 - (c) Nemá různé **dvojnásobné limity**?
 - (d) Jak to dopadne na **přímkách** $y = kx$?
 - (e) Je tam **omezená** funkce?
 - (f) Jsou tam **odmocniny**?
2. (a) Nemáme nějaký **odhad**?
- (b) Jak to dopadne na dalších **křivkách**?
- (c) Co **definice** limity?

Hinty

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

$$|\sin t| \leq 1$$

$$\pm xy \leq x^2 + y^2$$

$$|\sin t| \leq |t|$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Příklady – definiční obor

1. Určete definiční obor a načrtněte (příklady ze zkoušek)
- (a) $f(x, y) = \arcsin(x + y) + \arctan(x + y) + xy$
 - (b) $f(x, y) = \ln \left(\frac{x}{|x| - |y|} \right)$
 - (c) $f(x, y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$
 - (d) $f(x, y) = \arcsin \sqrt{x(x + y)}$

Příklady – limity, které ilustrují různé situace

2. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.
Všechny limity uvažujeme vzhledem k definičnímu oboru daných funkcí.

- (a) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

- (b) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

- (c) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$

Ukažte, že limita funkce neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové a též limita počítaná po libovolné přímce je nulová.

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow [0,0]} x \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}$

(f) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ limity

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ a $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ neexistují, ale

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ vzhledem k definičnímu oboru funkce f existuje a je rovna 0.

3. Shrňte, jaké situace jsme zatím potkali. (Např. existuje dvojná limita, ale neexistuje limita; existují limity po přímkách, ale limita neexistuje; . . .)

Příklady – limity na procvičení

4. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

Všechny limity uvažujeme vzhledem k definičnímu oboru daných funkcí.

(a) $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,4]} \frac{x + 2y}{2x + y}$

(b) $\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{xy + 2x + y + 2}{xy^2 + y^2 + x + 1}$

(c) $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17}$

(d) $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} \frac{\tan xy}{y}$

(e) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x \sin \frac{1}{x - y + z}$

(f) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

(g) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

(h) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2}$

(i) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$

(j) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|} \right)^{|x| + |y| + |z|}$

(k) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}$

(l) $\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

(m) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(n) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

(o) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$

(p) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{y^4 - xy^2}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$

(q) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y (|x| + |y|)}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$

5. Projděte si znovu sekci Shrnutí a Algoritmus. Zpracujte jej do nějakého (pro Vás) vhodného formátu. Např. Tabulka, Myšlenková mapa, Rozhodovací strom. . .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (bF)