

2. zápočtová písemka – vzor

Písemka je na 60 minut a je možno používat libovolnou tištěnou či rukou psanou literaturu, ale žádnou techniku.

1. Uvažujte rovnici

$$\cos(x + y^2) + \sin(xy) = -1.$$

Ukažte, že tato rovnice definuje na jistém okolí bodu π funkci $y(x)$, která splňuje $y(\pi) = 0$, a spočtěte $y'(\pi)$.

2. Rozhodněte, zda vztahy

$$\begin{aligned} -v &= \cos(xv) + \arctan(yu) \\ u &= \sin(x + u) + \sin(y - v) \end{aligned}$$

definují funkce u, v proměnných x, y , které jsou třídy \mathcal{C}^1 na nějakém okolí bodu $[x, y, u, v] = [\pi, 1, 0, 1]$ takové, že $u(\pi, 1) = 0$ a $v(\pi, 1) = 1$. Určete $\frac{\partial u}{\partial y}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$.

3. Uvažujte funkci $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Předpokládejme, že $u(0, 0) = 1$ a $\nabla u(0, 0) = (1, 2)$. Předpokládejme, že $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y) = (e^{x+y}u(x+y, x-y), (\sin(x+y)-1)u(2y, -x), \arctan(x-y)u(y, xy)), \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Určete, zda existuje $F'(0, 0)$, a pokud ano, určete její reprezentující matici.