1. cvičení – Soustavy ODR

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a) $\begin{aligned} u' &= 2u && -4v \\ v' &= u && -3v \end{aligned}$

Řešení:

- Napíšeme λ-matici. Vynásobíme 2. řádek číslem (-4). Pak ke 2. řádku přičteme $(\lambda+3)$-násobek 1. řádku.

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -1 & \lambda+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 4 & -4(\lambda+3) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 4+(\lambda-2)(\lambda+3) & -4(\lambda+3)+4(\lambda+3) \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ \lambda^2+\lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Z 2. řádku máme diferenciální rovnici

$$u''+u'-2=0$$
$$(\lambda+2)(\lambda-1)=0$$

Tedy $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ a

$$u=c_1e^{-2x}+c_2e^{x},$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Ze zadání pak můžeme vyjádřit v:

$$-4v = u'-2u$$
$$v=-\frac{1}{4}(-2c_1e^{-2x}+c_2e^{x}-2c_1e^{-2x}-2c_2e^{x})$$
$$v=c_1e^{-2x}+\frac{1}{4}c_2e^{x}$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Závěr

$$u=c_1e^{-2x}+c_2e^{x},$$
$$v=c_1e^{-2x}+\frac{1}{4}c_2e^{x},$$
$$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

(b) $\begin{aligned} u' &= u && -4v \\ v' &= 2u && -3v \end{aligned}$

Řešení:

- Napíšeme λ-matici. Vynásobíme 1. řádek číslem (2). Pak k 1. řádku přičteme $(\lambda-1)$-násobek 2. řádku.

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 4 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 8 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2(\lambda-1)-2(\lambda-1) & 8+(\lambda+3)(\lambda-1) \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2+2\lambda+5 \\ -2 & \lambda+3 \end{pmatrix} \sim$$

- Z 1. řádku máme diferenciální rovnici

$$2'' + 2v' + 5 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

Tedy $\lambda_1 = -1+2i$, $\lambda_2 = -1-2i$ a

$$v = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x),$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Ze zadání pak můžeme vyjádřit u:

$$\begin{aligned} 2u &= v' + 3v \\ u &= \frac{1}{2}(-c_1e^{-x}\cos(2x) - 2c_1e^{-x}\sin(2x) - c_2e^{-x}\sin(2x) + 2c_2e^{-x}\cos(2x) + \\ &\quad 3c_1e^{-x}\cos(2x) + 3c_2e^{-x}\sin(2x)) \\ u &= (c_1+c_2)e^{-x}\cos(2x) + (c_2-c_1)e^{-x}\sin(2x) \end{aligned}$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Závěr

$$\begin{aligned} u = (c_1+c_2)e^{-x}\cos(2x) + (c_2-c_1)e^{-x}\sin(2x), \\ v = c_1e^{-x}\cos(2x) + c_2e^{-x}\sin(2x), \\ c_1, c_2, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(c) $\begin{aligned} u' &= -7u + 9v \\ v' &= -u - v \end{aligned}$

Řešení:

- Napíšeme λ-matici. Vynásobíme 1. řádek číslem (-1). Pak k 1. řádku přičteme $(\lambda+7)$-násobek 2. řádku.

$$\begin{pmatrix} \lambda+7 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -(\lambda+7) & 9 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -(\lambda+7)+1(\lambda+7) & 9+(\lambda+1)(\lambda+7) \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2+8\lambda+16 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

- Z 1. řádku máme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} v'' + 8v' + 16 &= 0 \\ (\lambda+4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tedy $\lambda_{1,2} = -4$,

$$v = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x},$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Ze zadání pak můžeme vyjádřit u:

$$\begin{aligned} u &= -v' - v \\ u &= -(-4c_1 e^{-4x} - 4c_2 x e^{-4x} + c_2 e^{-4x} + c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}) \\ u &= 3c_1 e^{-4x} - c_2 e^{-4x} + 3c_2 x e^{-4x}, \end{aligned}$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Závěr

$$\begin{aligned} v &= c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}, \\ u &= 3c_1 e^{-4x} - c_2 e^{-4x} \\ & c_1, c_2, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(d) $\begin{aligned} u' = &\quad 2u \quad -4v \\ v' = &\quad u \quad -2v \end{aligned}$

$u(0) = 0$, $v(0) = -1$

Řešení:

- Napíšeme λ-matici. K 1. řádku přičteme $(\lambda-2)$-násobek 2. řádku.

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (\lambda-2)-(\lambda-2) & 4+(\lambda+2)(\lambda-2) \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

- Z 1. řádku máme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} v'' &= 0 \\ \lambda^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tedy $\lambda_{1,2} = 0$,

$$v = c_1 + c_2 x,$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Ze zadání pak můžeme vyjádřit u:

$$\begin{aligned} u &= v' + 2v \\ u &= c_2 + 2c_1 + 2c_2 x = 2c_2 x + (c_2 + 2c_1) \end{aligned}$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Počáteční podmínky

$$\begin{aligned} 0 &= c_2 + 2c_1 \\ -1 &= c_1 \end{aligned}$$

Tedy $c_1 = -1$ a $c_2 = 2$.

- Závěr

$$u = 4x$$
$$v = -1 + 2x$$
$$x \in \mathbb{R}$$

(e) $\begin{aligned} u' &= \quad v \\ v' &= -u \end{aligned}$

Řešení:

- Napíšeme λ-matici. Pak k 2. řádku přičteme λ-násobek 1. řádku.

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1+\lambda^2 & \lambda - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1+\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

- Z 1. řádku máme diferenciální rovnici

$$u'' + 1 = 0$$
$$\lambda^2 = -1$$

Tedy $\lambda_{1,2} = \pm i$,

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Ze zadání pak můžeme vyjádřit v:

$$v = u'$$
$$v = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Závěr

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x v \quad = -c_1 \sin x + c_2 \cos x c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$$

(f) $\begin{aligned} u' &= 2u \quad -3v \\ v' &= u \quad -2v \end{aligned}$

Řešení:

- Napíšeme λ-matici. Pak k 1. řádku přičteme $(\lambda - 2)$-násobek 2. řádku.

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (\lambda-2) - 1(\lambda-2) & 3 + (\lambda+2)(\lambda-2) \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 - 1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim$$

- Z 1. řádku máme diferenciální rovnici

$$v'' - 1 = 0$$
$$\lambda^2 = 1$$

Tedy $\lambda_{1,2} = \pm 1$,

$$v = c_1 e^x + c_2 e^{-x},$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Ze zadání pak můžeme vyjádřit u:

$$\begin{aligned} u &= v' + 2v \\ u &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_1 e^x + 2c_2 e^{-x} \\ &= 3x_1 e^x + c_2 e^{-x} \end{aligned}$$

$c_1, c_2, x \in \mathbb{R}$

- Závěr

$$\begin{aligned} v &= c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \\ u &= 3x_1 e^x + c_2 e^{-x}, \\ &c_1, c_2, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(g) $$\begin{aligned} u' &= 2u + v - w \\ v' &= 7u + 4v - w \\ w' &= 13u + 7v - 3w \end{aligned}$$

Řešení: Příkladi s řešením máme z https://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/Kapitola-SoustavyLinRovnic/soustavyRovnic2.pdf

- Napíšeme λ-matici. Pak k 2. řádku přičteme (-1)-násobek 1. řádku, ke 3. řádku přičteme $-(\lambda+3)$-násobek 1. řádku.

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda-4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -7-\lambda+2 & \lambda-4+1 & 1-1 \\ -13-(\lambda-2)(\lambda+3) & -7+\lambda+3 & \lambda+3-(\lambda+3) \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -\lambda-5 & \lambda-3 & 0 \\ -\lambda^2-\lambda-7 & \lambda-4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ke 2. řádku přičteme (-1)-násobek 3. řádku.

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -\lambda-5+\lambda^2+\lambda+7 & \lambda-3-\lambda+4 & 0 \\ -\lambda^2-\lambda-7 & \lambda-4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda^2+2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2-\lambda-7 & \lambda-4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ke 3. řádku přičteme $-(\lambda-4)$-násobek 2. řádku.

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda^2+2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2-\lambda-7-(\lambda-4)(\lambda^2-2) & \lambda-4-(\lambda-4) & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda^2+2 & 1 & 0 \\ -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ze 3. řádku máme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} -u''' + 3u'' - 3u' + 1 &= 0 \\ -(\lambda-1)^3 &= 0 \end{aligned}$$

Tedy $\lambda_{1,2,3} = 1$,
$$u = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x,$$
$c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R}$

- Ze 2. řádku matice vyjádříme v:
$$\begin{aligned} v &= -u'' - 2u \\ v &= -e^x(c_1 + c_2 x + 2c_2 + c_3 x^2 + 4c_3 x + 2c_3) - 2(c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x) \\ &= e^x(-3c_1 - 2c_2 - 3c_2 x - 2c_3 - 4c_3 x - 3c_3 x^2) \end{aligned}$$
- Ze zadání pak můžeme vyjádřit w:
$$\begin{aligned} w &= -u' + 2u + v \\ w &= -e^x(c_1 + c_2 x + 2c_2 + c_3 x^2 + 4c_3 x + 2c_3) + 2(c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x) \\ &\quad + e^x(-3c_1 - 2c_2 - 3c_2 x - 2c_3 - 4c_3 x - 3c_3 x^2) \\ w &= e^x(-2c_1 - 3c_2 - 2c_3 - 2c_2 x - 6c_3 x - 2c_3 x^2) \end{aligned}$$
$c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R}$
- Závěr
$$\begin{aligned} u &= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x, \\ v &= -3c_1 - 2c_2 - 3c_2 x - 2c_3 - 4c_3 x - 3c_3 x^2) \\ w &= e^x(-2c_1 - 3c_2 - 2c_3 - 2c_2 x - 6c_3 x - 2c_3 x^2) \\ & c_1, c_2, c_3, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2a)

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} y$$

$$-\left(\begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ -4 & \lambda+2 & 3 \\ -2 & \lambda & \lambda+2 \end{pmatrix}\right) \begin{matrix} \cdot(\lambda+2) \\ + \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ (\lambda+2)(\lambda-4)+8 & 0 & 4\lambda+2 \\ \lambda-2 & 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix} \sim$$

(jen roznásobení)

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ \lambda(\lambda-2) & 0 & 2(2\lambda+1) \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot(-\lambda) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2\lambda+\lambda^2+4\lambda+2 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

y_3: $-2\lambda+\lambda^2+4\lambda+2$

$\lambda^2+2\lambda+2=0$

$\lambda = -1 \pm i$

$$\underline{y_3 = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x}$$

y_1: $y_1' - 2y_1 = -2y_3 + y_3'$

$y_1' - 2y_1 = e^{-x}\left((-3c_1+c_2)\cos x + (-c_1-3c_2)\sin x\right)$

$\downarrow$ spec PS

$\lambda - 2 = 0 \qquad y_{1H} = c_3 e^{2x}$

$\lambda = 2$

$-1+1i$ není kořen

$y_{1p} = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$

pak $e^{-x}\left((-3A+B)\cos x + (-A-3B)\sin x\right) = e^{-x}\left((-3c_1+c_2)\cos x + (-c_1-3c_2)\sin x\right)$

zřejmě $A=c_1$, $B=c_2$

pak $y_1 = c_3 e^{2x} \underline{+ c_1 e^{-x}\cos x} + c_2 e^{-x}\sin x$

na konec $y_2 = \frac{1}{2}\left(2y_1 - y_3' - 2y_3\right)$

$y_2 = \frac{1}{2}e^{-x}\left((c_1+c_2)\sin x \underline{+ (c_1-c_2)\cos x} + 2c_3 e^{3x}\right)$

(2b) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} y$

$$\begin{array}{l} (\lambda-4)\cdot \\ + \\ (2) \end{array} \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix})+ \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -\lambda-2 & (\lambda-1)(\lambda-4)-2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \; + \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -\lambda-2 & \lambda^2-5\lambda+2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -4 & \lambda^2-4\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \\ \cdot(\lambda-2) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & (\lambda^2-4\lambda)(\lambda-2) + 4(\lambda-2) & 0 \end{pmatrix}$$

y_2:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 4\lambda - 8 = 0$$
$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$
$$(\lambda-2)^3 = 0$$

3-nás koreň $\lambda = 2$

$$y_2 = c_1 e^{2x} + \underline{c_2 x e^{2x}} + c_3 x^2 e^{2x}$$

y_1:

$$4y_1 = y_2'' - 4y_2'$$
$$4y_1 = -2e^{2x}(2c_1 + 2c_2 x + c_3(2x^2-1))$$
$$y_1 = -e^{2x}(c_1 + c_2\cancel{x} + c_3(x^2 - \tfrac{1}{2}))$$

y_3:

$$-2y_3 = y_1' - y_1 - y_2$$
$$y_3 = e^{2x}(c_1 + \cancel{\tfrac{c_2}{x}x} + \frac{c_2}{2} + c_3 x^2 + c_3 x - \frac{c_3}{4})$$

$c_2 x$

(2c)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{array}{c} (\lambda-1)\cdot \\ + \\ (-1) \end{array} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2+1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} - \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ 2-szeres $\qquad \underline{y_1 = c_1 e^x + c_2 x e^x}$

pak $\qquad y_2' - y_2 = -c_1 e^x - c_2 x e^x$

$$e^{-x} y_2' - e^{-x} y_2 = -c_1 - c_2 x$$

$$(e^{-x} y_2)' = -c_1 - c_2 x$$

$$y_2 = \underline{e^x \left(-c_1 x - \tfrac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 \right)}$$

$y_3 = -y_2 - y_1' + y_1 \qquad y_3 = \frac{1}{2} e^x \left(\underline{2c_1 x} - 2c_2 - 2c_3 + c_2 x^2 \right)$

(20)

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 3 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} /(\lambda+1) \\ + /\lambda-3 \\ \sim \\ * \end{matrix} \begin{pmatrix} (\lambda-3)(\lambda+1)+3 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda-2) \to$ $\quad \underline{y_1 = c_1 + c_2 e^{2x}}$

$-3y_2 = y_1' - 3y_1$

$y_2 = -\frac{1}{3}\left(2c_2 e^{2x} - 3c_1 - 3c_2 e^{2x}\right)$

$= c_1 + \frac{1}{3} c_2 e^{2x}$

nakonec $\quad y_3' - y_3 = 2y_1 - 2y_2$

$y_3' - y_3 = \cancel{2c_1} + 2c_2 e^{2x} - \cancel{2c_1} - \frac{2}{3} c_2 e^{2x}$

$y_3' - y_3 = \frac{4}{3} c_2 e^{2x}$

I faktor: $\quad e^{-x} y_3' - y_3 e^{-x} = \frac{4}{3} c_2 e^{x}$

$(e^{-x} y_3)' = \frac{4}{3} c_2 e^{x}$

$y_3 = \underline{e^{x}\left[\frac{4}{3} c_2 e^{x} + c_3\right]}$

(2e)

$$y' = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ -4 & \lambda+5 & -1 \\ -10 & 10 & \lambda+5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \cdot(-10) \\ - \quad)+ \\ (\cdot \lambda+5) \end{matrix} \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ 40-10\lambda-50 & 0 & 10+(\lambda+5)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ -10(\lambda+1) & 0 & \lambda^2+10\lambda+35 \end{pmatrix} \Big| \cdot 10 \sim \begin{pmatrix} \lambda-9 & 10 & 4 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & 0 & \underbrace{\lambda^2+10\lambda+35 -10\lambda-10}_{\lambda^2-25} \end{pmatrix}$$

*

$$\lambda^2+25=0 \qquad y_3 = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$$

$$\lambda = \pm 5i$$

$$y_1' + y_1 = y_3' + y_3$$

$$y_1' + y_1 = (\cos 5x)(c_1 + 5c_2) + (c_2 - 5c_1)\sin 5x$$

$$(y_1 e^x)' = e^x \left[\cos 5x \, (c_1 + 5c_2) + (c_2 - 5c_1)\sin 5x \right]$$

pravidlo PC

$$y_1 = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + c_3 e^{-x}$$

$$10 y_2 = -4 y_3 + 9 y_1 - y_1'$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\sin 5x + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos 5x + c_3 e^{-x}$$

$u' = 2u - 4v$

$v' = u - 3v$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -1 & \lambda+3 \end{pmatrix}_{\cdot(\lambda-2)} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -(\lambda-2) & (\lambda+3)(\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 0 & 4+\lambda^2-6+\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda^2+\lambda-2=0$

$(\lambda+2)(\lambda-1)$

$\lambda_1=-2 \quad \lambda_2=1$

$v''-v'-2v=0$

$\boxed{v = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}}$

$u = v' + 3v$

$u = c_1e^{x} + (-2)c_2e^{-2x} + 3c_1e^{x} + 3c_2e^{-2x}$

$\boxed{u = 4c_1e^{x} + c_2e^{-2x}}$

Chyba: Fáčlež nesmíme násobit λ