ODR vyššího řádu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s konstantními koeficenty* rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{1}$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \tag{2}$$

Poznámka 2. Maximální řešení rovnice (2) jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

Definice 3. *Charakteristickým polynomem* rovnice (2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 4 (tvar fundamentálního systému)**.** Nechť χ je charakteristický polynom rovnice (2). Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i$, $\dots$, $\alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$. Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2):

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x}, & \dots & x^{r_s-1}e^{\lambda_s x}, \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, \\
e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x
\end{array}$$

Věta 5 (speciální pravá strana)**.** Nechť

$$f(x) = e^{\mu x} \cdot (P(x)\cos\nu x + Q(x)\sin\nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$y_p(x) = x^m e^{\mu x} \cdot (R(x)\cos\nu x + S(x)\sin\nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně ne většího než $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Algoritmus pro vyšší řád

1. Vyřešíme **homogenní** rovnici:
   (a) Napíšeme **charakteristický** polynom a najdeme kořeny.
   (b) Sestavíme řešení.
2. Zkontrolujeme, že pravá strana je ve **vhodném tvaru**, případně jestli není třeba **součtem** vhodných tvarů.
3. Použijeme Větu o Speciální pravé straně a **odhadneme tvar řešení** (s několika neznámými koeficienty).
4. Dosadíme do nehomogenní rovnice a dopočteme koeficienty.
5. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

Algoritmus

1. Vyřešíme **homogenní** rovnici a sestavíme řešení (kde se bude vyskytovat několik konstant).
2. **Zkontrolujeme**, jestli příklad přeci jen není na **speciální pravou stranu**.
3. Přepíšeme **konstanty** na **„funkce"** a jdeme derivovat. Po každém **zderivování** se položí část rovnice s derivacemi c' **rovna 0**. Konkrétně: začínáme s funkcí

   $$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots c_n(x)y_n(x).$$

   Po 1. zderivování dostaneme

   $$y_p' = (c_1y_1' + c_2y_2' + \cdots c_ny_n') + (c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots c_n'y_n)$$

   a položíme

   $$(c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots c_n'y_n) = 0.$$

   Po 2. zderivování dostaneme

   $$y_p'' = (c_1y_1'' + c_2y_2'' + \cdots c_ny_n'') + (c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots c_n'y_n')$$

   a položíme

   $$(c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots c_n'y_n') = 0.$$

   Po n-tém zderivování dostaneme

   $$y_p^{(n)} = (c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \cdots c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots c_n'y_n^{(n-1)})$$

   a dosadíme do původní nehomogenní rovnice. Dostaneme

   $$(c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots c_n'y_n^{(n-1)}) = f.$$

4. Z modrých řádků získáme soustavu pro c', spočteme.
5. Zintegrujeme konstanty c'.
6. Řešením je **homogenní** + **dopočtené** řešení.
7. Případně dořešíme **podmínky**.