1. cvičení – Soustavy ODR

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Zavedeme operátor derivace λ. Pak $\lambda u = u'$, $\lambda^2 u = u''$, $\lambda^2 u - \lambda u = u'' - u'$ atd...
2. Sestavíme matici $\mathbf{A}$ a vytvoříme $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ (všechno převedeme na levou stranu).
3. Matici převedeme na trojúhelníkový tvar:
   (a) Můžeme prohazovat řádky.
   (b) Můžeme násobit řádky nenulovým číslem.
   (c) Můžeme k řádku přičíst $P(\lambda)$ násobek jiného řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom.
   (d) **Nemůžeme** násobit řádek polynomem λ - zvýšil by se řád soustavy.
   (e) **Nemůžeme** dělit řádky polynomem λ.
4. Přepíšeme zpátky na tvar s derivacemi a vyřešíme.
5. Případně dořešíme podmínky.

Příklady

1. (a) $\begin{aligned} u' &= 2u - 4v \\ v' &= u - 3v \end{aligned}$

   (b) $\begin{aligned} u' &= u - 4v \\ v' &= 2u - 3v \end{aligned}$

   (c) $\begin{aligned} u' &= -7u + 9v \\ v' &= -u - v \end{aligned}$

   (d) $\begin{aligned} u' &= 2u - 4v \\ v' &= u - 2v \end{aligned}$
   $u(0) = 0$, $v(0) = -1$

   (e) $\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -u \end{aligned}$

   (f) $\begin{aligned} u' &= 2u - 3v \\ v' &= u - 2v \end{aligned}$

   (g) $\begin{aligned} u' &= 2u + v - w \\ v' &= 7u + 4v - w \\ w' &= 13u + 7v - 3w \end{aligned}$

   (1g): https://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/Kapitola-SoustavyLinRovnic/soustavyRovnic2.pdf

   ### Zkouškové příklady

2. (a) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$

   (b) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$

   (c) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$

   (d) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$

(e) $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$

3. Najděte **chybu**. Jak ovlivní řešení? A proč?

$u' = 2u - 4v$

$v' = u - 3v$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -1 & \lambda+3 \end{pmatrix} \underset{\cdot(\lambda-2)}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ -(\lambda-2) & (\lambda+3)(\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 0 & 4+\lambda^2-6+\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda^2+\lambda-2=0$

$(\lambda+2)(\lambda-1)$

$\lambda_1=-2 \quad \lambda_2=1$

$v''-v'-2v=0$

$\underline{v = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}}$

$u = v' + 3v$

$u = c_1 e^x + (-2) c_2 e^{-2x} + 3c_1 e^x + 3c_2 e^{-2x}$

$\underline{u = 4c_1 e^x + c_2 e^{-2x}}$