24. cvičení – Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Implikace

1. Najděte nebo vyvraťte všechny možné implikace mezi následujícími čtveřicemi výroků. (od prof. M. Huška: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/)
   Jak na to:

   - nakreslíme si diagram a doplňujeme šipky, nejlépe velké a barevně. Další šipky je pak možno doplnit/vyvrátit díky tranzitivitě.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ D & \begin{array}{c}\not\longleftarrow \\ \longrightarrow\end{array} & C \end{array}$$

   - dokazujeme přímo $A \implies B$;
   - nepřímo $B' \implies A'$;
   - pro vyvrácení nebo sporem $A \wedge B'$;
   - protipříklad, který splňuje $A \wedge B'$.

   (a) Nechť $A \subset \mathbb{R}$

   (A) A je nespočetná

   (B) A je nekonečná

   (C) A je neomezená

   (D) $\mathbb{R} \setminus A$ je spočetná

   ✿ $D \Rightarrow A$

   (b) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost.

   (A) $\{a_n\}$ není konstantní

   (B) $\{a_n\}$ má prostou podposloupnost

   (C) $\{a_n\}$ má ryze monotónní podposloupnost

   (D) množina hodnot $\{a_n\}$ je nekonečná

   ❀ $B \Rightarrow C$

---

2 Úvod a Posloupnosti

2. Existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje?
3. Sestrojte konvergentní posloupnost takovou, že $\max\{a_n\}$ neexistuje.
4. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Musí platit $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?
5. (a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost celých čísel. Musí být limita celé číslo?
   (b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
6. Jestliže platí, že $a_{n+2} \geq a_n$, musí mít posloupnost limitu? Co když přidáme omezenost?
7. Najděte k dané neomezené posloupnosti a_n takovou nenulovou posloupnost b_n, aby $a_n b_n \to 0$.
8. ☘ Stačí pro konvergenci posloupnosti, aby $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$?
9. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.
10. Nechť M je neomezená množina, nechť $\beta > 0$. Existuje pak $A \subset M$ nekonečná tak, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ platí, že $|x - y| > \beta$?

---

3 Funkce

11. Nechť je funkce klesající na disjunktních intervalech I a J. Musí být klesající na $I \cup J$?
12. Nechť je funkce konvexní na intervalu $[-1,0]$ a také na $[0,1]$? Musí být pak konvexní na $[-1,1]$?
13. Sestrojte (stačí obrázkem) nezápornou funkci f na intervalu $(0,1)$, nespojitou právě v bodech množiny $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ tak, aby $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ a aby
$$\inf\{f(x); x \in (0,1)\} = 0, \qquad \sup\{f(x);\ x \in (0,1)\} = 1.$$
14. ❄ Nechť f je nekonstantní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Ukažte, že pak neexistuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
15. ✽ Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, nechť navíc existují limity v nevlastních bodech a
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Zjistěte, zda je pak již f omezená a zda nabývá v alespoň jednom bodě z $\mathbb{R}$ maxima nebo minima.
16. Rozhodněte, zda je funkce
$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$
konstantní ve svém definičním oboru, a řešení odůvodněte.
17. ✽ Najděte příklad funkce, pro kterou existují derivace na intervalech (a,c) a (c,b), dále existují a jsou si rovny $\lim_{x\to c-} f'(x) = \lim_{x\to c+} f'(x)$ a přitom neexistuje $f'(c)$.
18. Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom $f'_+(7) = 2$.
19. ♡ Nechť je funkce f spojitá v bodě 0. Musí existovat $f'_+(0)$? Dokažte, nebo sestrojte protipříklad.
20. Sestrojte (stačí obrázkem) ryze monotónní funkci na intervalu $(0,1)$, která má infimum hodnot rovné 0, supremum hodnot rovné 1 a je nespojitá právě v bodech $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
21. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce. (A předpokládáme, že následující výroky mají smysl, například že složení $f(g))$ je dobře definované na celém definičním oboru g atd....) Určete, které výroky jsou pravdivé

   (a) f i g jsou liché.
      i. $f+g$ je lichá
      ii. fg je lichá
      iii. $f(g)$ je lichá

   (b) f je sudá, g je lichá.
      i. fg je sudá
      ii. $f(g)$ je sudá
      iii. $g(f)$ je sudá
      iv. $g+f$ je sudá

   (c) f i g jsou rostoucí
      i. $f+g$ jsou rostoucí
      ii. fg jsou rostoucí
      iii. $f(g)$ jsou rostoucí

   (d) f je sudá
      i. je-li f rostoucí na $(0,\infty)$, je rostoucí i na $(-\infty,0)$.
      ii. je-li f konvexní na $(0,\infty)$, je konvexní i na $(-\infty,0)$.

4 Vzorová písemka

Příklad 1. Spočtěte limitu posloupnosti
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2. Spočtěte limitu funkce
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3. Uvažujte funkci f definovanou předpisem
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

- Vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je hodnota $f(x)$ dobře definovaná (tuto množinu budeme značit symbolem $\mathcal{D}(f)$),
- určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ je f spojitá, případně jednostranně spojitá,
- určete limity f v krajních bodech definičního oboru a vyšetřete, zda má funkce asymptoty,
- určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje $f'(x)$, případně $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, a určete jejich hodnotu,
- určete intervaly a typ monotonie funkce f,
- nalezněte všechny lokální a globální extrémy funkce f,
- určete obor hodnot funkce f,
- určete, ve kterých bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje $f''(x)$ a určete její hodnotu,
- určete intervaly konvexity a konkávnosti funkce f,
- nalezněte všechny inflexní body funkce f,
- rozhodněte, zda funkce f má asymptotu v ∞ a/nebo v $-\infty$, a pokud ano, určete ji,
- načrtněte graf funkce f.

(20 bodů)

Příklad 4. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

(i) Jestliže platí $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1$, potom existuje $\lim_{x\to 0_+} f^2(x)$ a platí $\lim_{x\to 0_+} f^2(x) = 1$.

(ii) Jestliže platí $\lim_{x\to 0_+} f^2(x) = 1$, potom existuje $\lim_{x\to 0_+} f(x)$ a platí $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1$.

(iii) Jestliže platí $\lim_{x\to 0_+} f^3(x) = 1$, potom existuje $\lim_{x\to 0_+} f(x)$ a platí $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1$.

(10 bodů)

(1a) $D \Rightarrow A$: zkoumejte $A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$.
(1b) $B \Rightarrow C$: myšlenka jako v Dk. Bolzano-Weierstrassovy věty.
(8) co $\log n$?
(14) Heine.
(15) Definice limity + nabývání extrémů na omezeném a uzavřeném intervalu.
(17) Máme nějakou větu o limitě derivací? Jaké má podmínky? (A co tedy nesmí splňovat naše problematická funkce?)
(19) $x \sin \frac{1}{x}$