23. cvičení – Taylorův polynom – limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh -1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \sin(x \ln(1+x))}{x^2}$

(e)❄ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$

(f)♣ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$

(g)❀ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1}\right]$

(h)☆ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

(j) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$

(k)❀ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2 + 5x^4} - e^{x^2 - 3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)}$

(l) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$

(m) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0$.

(n) Najděte takové $n \in \mathbb{N}$, aby limita byla konečná a různá od nuly: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

(o) Najděte takové $n \in \mathbb{N}$, aby limita byla konečná a různá od nuly:
$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1 + \sin x) - \ln^2(1 + \arcsin x)}{x^n}$

Zkouškové příklady

2. Zdroj: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html

   (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte
   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$

   (b) Určete hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které platí
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a\sin\frac{x}{a}} = 1.$$

   (c) Rozviňte funkce $e^{\cos x}$ do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$
   (pokud existuje) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

   (d) Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4}$$
   Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte.

   (e) Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) + x\arctan(bx) - b}{x^4}$$
   existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte.

Odhady

3. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

   (a) $\sqrt[3]{e}$
   (b) $\arcsin 0,2$
   (c) $(1,04)^4$
   (d) $\ln(1,02)$
   (e) $\arctan 1,1$
   (f) $\sin(-0,22)$

   Následující příklady máme odsud: Sbírka z mat. analýzy Zemánek Hasil:
   https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html

4. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.
5. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?
6. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.

(1e) Substitujeme $y = \frac{1}{x}$
(1f) Substitujeme $y = \frac{1}{x}$
(1g) Substitujeme $y = \frac{1}{x}$
(1h) Substitujeme $y = \frac{1}{x}$
(1k) Koukněte na Hinty nahoře.