22. cvičení – Teorie z písemek

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte nebo sestrojte protipříklad):

1. Nechť $f, g : [0,1] \to [0,1]$ jsou spojité funkce.
   - (a) Nechť $f(0) = g(0) = 0$ a $f(1) = g(1) = 1$. Musí existovat $x \in (0,1)$ tak, že $f(x) = g(x)$?
   - (b) Nechť $f(0) = g(1) = 0$ a $f(1) = g(0) = 1$. Musí existovat $x \in (0,1)$ tak, že $f(x) = g(x)$?
2. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce.
   - (a) $\exists K > 0\ \forall x \in [-1,1]\ \ -Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2 \ \Rightarrow$ existuje $f'(0)$.
   - (b) Existuje $f'(0) \Rightarrow \exists K > 0\ \forall x \in [-1,1]\ \ -Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2$
3. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce.
   - (a) $\exists f'(0) \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \exists \delta > 0$, že f je omezená na $(-\delta, \delta)$?
   - (b) $\exists f'(0) \in \mathbb{R}^* \ \Rightarrow\ \exists \delta > 0$, že f je omezená na $(-\delta, \delta)$?
4. (a) Dokažte, že existuje funkce $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ taková, že existuje vlastní limita $\lim_{x\to 0+} f'(x)$, existuje $f'_+(0)$ a neplatí rovnost $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$.
   - (b) Dokažte, že existuje funkce $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ taková, že existuje derivace $f'_+(0)$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (0,1)$ a neexistuje $\lim_{x\to 0+} f'(x)$.
5. Rozhodněte, zda existuje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se spojitou druhou derivací na $\mathbb{R}$, která není ani konvexní ani konkávní na žádném intervalu v $\mathbb{R}$.

(1a) Stačí obrázkem.
(1b) Uvažujte funkci $h = f - g$.
(3b) Uvažujte funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$.
(4a) Uvažujte něco jako $\operatorname{sgn} x$.
(4b) Uvažujte $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
(5) Zvažte dvě situace. Buď je $f'' = 0$ na celém $\mathbb{R}$. Nebo musí být někde $f'' > 0$ (příp. $f'' < 0$). Pak ze spojitosti je $f'' > 0$ i na nějakém okolí.