21. cvičení – Taylorův polynom – limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Trochu jako u L'Hospitala: Pokud je to nutné, převedeme na **jeden zlomek**. Pokud to lze, použijeme **známé limity** - tím zjednodušíme výraz.
2. Odhadneme, do jakého **řádu** budeme rozvíjet. Nápověda:
   (a) Stupeň ve jmenovateli.
   (b) Rozvíjíme do takového stupně, aby nám zbyla nějaká x (nesmí se nám všechno „požrat“).
3. **Rozvineme**. Nezapomeneme na opatrnou práci s óčky.
4. **Vytkneme** nejvyšší člen. Dopočteme.

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

(d) ✽ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

(f) ❀ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x}$

(g) ♣ $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \arctan x - x}$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Bonus

2. ❄ Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.
3. ♡ Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.
4. ❆ Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.

(1d) Prve na společný jmenovatel.
(1f) Nejprve použijeme známou limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$.
(1g) Nejprve použijeme známé limity.
(2) Uvažujme $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
(3) Prve 2x zderivujte, pak rozviňte do Taylora v 0. Vytkněte x^3 a zkoumejte znaménko 2. derivace.
(4) Rozviňte do Taylora, vytkněte x^4 a zkoumejte znaménko funkce kolem 0.