



20. cvičení – Taylorův polynom

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a* .

Věta 2 (Lagrangeův tvar zbytku). Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$ -derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Definice 3. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a malé o od g (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$), pokud $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Speciálně, zápis

$$f(x) = o(x^n)$$

značí, pokud $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí nuly, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Věta 4 (Vlastnosti o). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, a $f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, pak

$$(f_1 \pm f_2)(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

2. Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$, a $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \rightarrow a$, pak

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)), \quad x \rightarrow a.$$

3. Jestliže $f(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$, a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$, pak

$$f(x) = o(g_2(x)), \quad x \rightarrow a.$$

4. Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a h je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a , pak

$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)h(x)), \quad x \rightarrow a.$$

5. Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a , pak

$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

6. Je-li $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$, potom

$$f(x) = o((x-a)^m), \quad x \rightarrow a.$$

Věta 5. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, necht φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a necht f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b . Necht $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$ a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$. Necht dále existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Pak

$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))), \quad x \rightarrow a.$$

Věta 6 (Jednoznačnost Taylorova polynomu). Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom splňující $\text{st } P \leq n$ a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Pak $P = T_n^{f,a}$.

Poznámka 7. 1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n* .

2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$.

Hinty

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

Algoritmus - Rozvoj z definice

1. Zderivujeme funkci až do n -tého stupně.
2. Dosadíme bod a - získáme koeficienty.
3. Sestavíme Taylorův polynom.

Příklady

Z definice

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.
Jak vypadá Taylorův polynom polynomu?
2. Najděte Taylorův polynom 3. stupně v 0 (není-li řečeno jinak)

(a) e^{-x} (b) $\sqrt{1+x}$ (c) $\ln x, a = 1$ (d) $\arctan x$ (e) $\frac{1}{1+x}$

3. Odvoďte rozvoje pro následující funkce do n -tého řádu v $a = 0$.

- (a) e^x (b) $\sin x$ (c) $\cos x$ (d) $\ln(1+x)$

4. Najděte Taylorovy polynomy:

- (a) \sqrt{x} v 1 do 5. stupně (d) $x \ln x$ v 1 do 4. stupně
(b) $\cos \frac{x\pi}{2}$ v 1 do 9. stupně (e) $\frac{1}{x}$ v 3 do 5. stupně
(c) $\frac{1-x}{1+x}$ v 0 do 7. stupně

5. Vyjádřete funkci $\sin \frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x - 2$.

Použitím vět

6. Odvoďte Taylorův rozvoj funkce v $a = 0$ do m -tého řádu

- (a) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $m = 5$.
(b) $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$, $m = 3$.
(c) $\clubsuit \frac{1}{3-2x}$, $m = \infty$
(d) $\heartsuit f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $m = 4$.
(e) $\spadesuit f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, $m = 2$.
(f) $\clubsuit f(x) = \ln(\cos x)$, $m = 6$.
(g) $f(x) = \sin(\sin x)$, $m = 3$.
(h) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $m = 13$.
(i) $\diamondsuit f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $m = 4$.
(j) $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right), & x \neq 0, |x| < \pi \\ 0, & x = 0. \end{cases}$, $m = 6$. Existenci $f^{(6)}(0)$ berte jako fakt.
(k) $\heartsuit f(x) = \operatorname{tg} x$, $m = 5$.
(l) $f(x) = e^{-x^2} \arcsin x$, $m = 5$

Bonus

7. Víte-li, že Taylorův polynom funkce f je $T_3^{f,0} = 2 - x - x^2/3 + 2x^3$, určete hodnoty

- (a) $f(0)$ (b) $f'(0)$ (c) $f''(0)$ (d) $f'''(0)$

8. Víte-li, že Taylorova řada $\cos x$ v 0 je $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, jak je na tom $\frac{1}{2} \cos(2x)$?

- A $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ B $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}$ C $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ D $\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3}$

9. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?

10. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = 1 + x - x^2$, pak je f konkávní na okolí 0?

11. Který Taylorův polynom bude vhodný k aproximaci hodnoty $\sin 3$, nemáte-li kalkulačku?

- A $x - \frac{1}{3}x^3$ C $-(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3$
 B $1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2$ D $\sin(3) - \frac{1}{3!}\sin(3)(x - 3)^3$

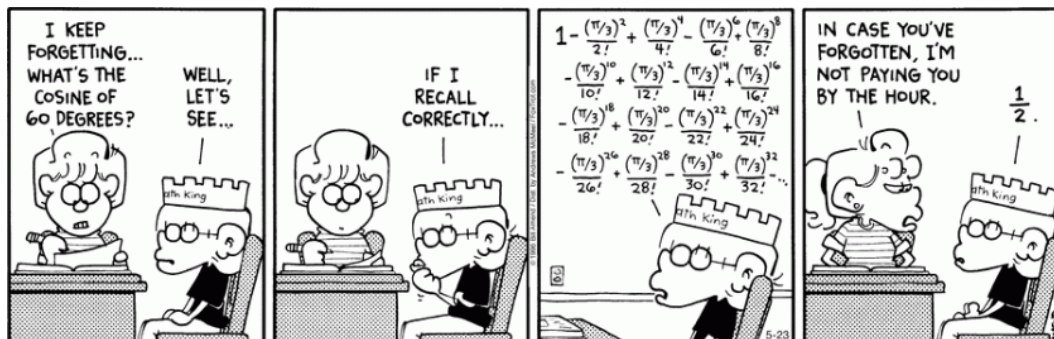


Figure 1: <https://www.gocomics.com/foxtrotclassics/2018/05/23>

(6c) Uzište geometrickou řadu $\frac{3(1-\frac{3}{2^n})}{1}$.
 (6d) Uzište geometrickou řadu $\frac{1-x+x^2}{1} = \frac{1-(x-x^2)}{1}$ a násobení.
 (6e) Uzište geometrickou řadu na výrazy $\frac{1-2x}{1}$ a $\frac{1+2x}{1}$, umocněte, vynásobte.
 (6f) Rozviňte zevnitř.
 (6i) Uzište geometrickou řadu.
 (6k) Rozviňte a použijte geometrickou řadu.