



## 19. cvičení – Průběh funkce 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

1. ✱ Uvažujte funkci  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zadanou předpisem

$$\begin{cases} \frac{x^2 \log x}{e^{2x}}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Rozhodněte, zda je funkce spojitá na  $[0, \infty)$ .
- (b) Rozhodněte, zda existuje  $f'_+(0)$ , a pokud ano, spočtěte ji.
- (c) Rozhodněte, zda má funkce  $f$  asymptotu v  $\infty$ , a pokud ano, určete ji.
- (d) ✂ Rozhodněte, zda existuje  $a \in (0, \infty)$  takové, že funkce  $f$  je monotónní na intervalu  $(a, \infty)$ .
- (e) ✱ Rozhodněte, zda existuje  $b \in (0, \infty)$  takové, že funkce  $f$  je konkávní na intervalu  $(0, b)$ .

2. Uvažujte funkci  $f$  definovanou předpisem

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x}\right), & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Ukažte, že je funkce  $f$  dobře definovaná.
  - (b) Rozhodněte, ve kterých bodech  $x \in [0, \infty)$  existují jednostranné derivace funkce  $f$  a pro tyto body je spočtěte.
  - (c) Určete intervaly monotonie funkce  $f$ .
  - (d) Určete obraz množiny  $[0, e]$  při zobrazení  $f$ .
  - (e) Určete intervaly konvexity a konkavity funkce  $f$ .
3. Uvažujte funkci  $f(x) = \sqrt{|\sin x|} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ .
- (a) Nalezněte body maxima a minima funkce  $f$ , pokud existují.
  - (b) Určete obor hodnot funkce  $f$ .
  - (c) ✂ Existuje otevřený interval  $I$  obsahující bod  $\frac{\pi}{2}$ , na kterém je funkce  $f$  konvexní?

4. Uvažujte funkci  $f$  zadanou předpisem

$$\begin{cases} (x^2)^{\sin x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Najděte intervaly, kde je funkce  $f$  spojitá.
- (b) Spočtěte  $f'(0)$ , pokud existuje.
- (c) ✱ Rozhodněte, zda existuje  $\delta > 0$  takové, že funkce  $f$  je rostoucí na intervalu  $(-\delta, \delta)$ .
- (d) ✂ Rozhodněte, zda existuje  $\xi > 0$  takové, že funkce  $f$  je monotónní na intervalu  $(\xi, \infty)$ .

### Bonus

**Definice 1.** Necht'  $f$  je reálná funkce a  $a \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že funkce  $f$  je *rostoucí v bodě*  $a$ , pokud existuje  $\delta > 0$  takové, že  $f(x) < f(a)$  pro všechna  $x \in P_-(a, \delta)$  a  $f(x) > f(a)$  pro všechna  $x \in P_+(a, \delta)$ .

**Věta 2.** Má-li reálná funkce  $f$  v bodě  $a \in \mathbb{R}$  kladnou (resp. zápornou) derivaci zprava, pak je v tomto bodě rostoucí (resp. klesající) zprava.

5.✱ Necht'

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že  $f$  je rostoucí v bodě 0, ale není monotónní na žádném intervalu  $(-\delta, \delta)$ .

(1) Na některé lim možno opakovaně užít LH	(1d) Spočítejte $\lim_{x \rightarrow \infty} f$
	(1e) Spočítejte $\lim_{x \rightarrow +0} f$
	(2) Kolik je $f''(\pi/2)$ ?
	(4c) Spočítejte $\lim_{x \rightarrow +0} f$
(1d) Testujte $f'(2k\pi)$ a $f'(\pi + 2k\pi)$	
(5) Určete derivaci v 0. Pak zkoumejte hodnoty v	
bodoch $x_n = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ a $y_n = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ .	