17. cvičení – L'Hospital + Heine

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo). Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí jedna z následujících podmínek

(a) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta 2 (Heineova). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x\to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Příklady

1. Spočtěte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy L'Hospital pomůže.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(d)♡ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}$

(i)✻ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{\log^2(n+1)}{(n-1)^2}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cot x - 1}{x^2}$

(k)❄ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

(n) $\lim\limits_{x\to 1-} \log x \cdot \log(1-x)$

(o)❀ $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi)\dfrac{n^k}{e^{an}}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\log(1+x)}$

(q) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$, $a, b > 0$

2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2-\pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, spojitá v π.

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n}$, $c > 1$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\log n)^{\frac{1}{n}}$

Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^8 \left(2\cos\dfrac{1}{n^2} - 2 + \dfrac{1}{n^4}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{\arcsin x - \sin x}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{5}{n}}\right)^{n^2}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\operatorname{arctan}\sqrt{n}}{\sin\operatorname{arccot}\sqrt{n}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}}$

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2)\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

Bonus

5.✤ Sestrojte funkce f, g rostoucí a spojité na $\mathbb{R}$ takové, že $x^2 = f(x) - g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

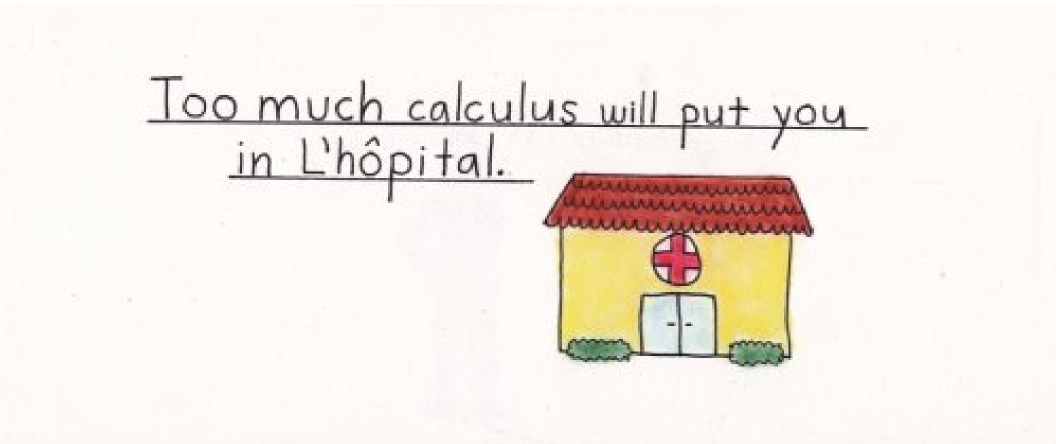

Figure 1: https://twitter.com/everydaycalc/status/722795700795277314

(1d) Použijte l'Hospitala pro $1/n = x \to 0+$
(1k) l'Hospital nefunguje, vytkněte x
(1o) Schovejte si kosinus a pak použijte k-krát l'Hospitala
(5) Zderivujme. Platí $f' > 0 \implies f$ je rostoucí