



16. cvičení – Derivace 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a . Značíme $f'(a)$.

Věta 2 (Aritmetika derivací). Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a . Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f , g **spojitá** v bodě a , pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g **spojitá** v bodě a a **navíc** $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně **definován**.

Věta 3 (O derivaci složené funkce). Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 **spojitá**. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně **definován**.

Věta 4. Nechť reálná funkce f je **spojitá** zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Algoritmus

1. Určíme **definiční obor** D_f . Na této množině pak budeme hledat derivaci.
2. Zderivujeme **mechanicky** tam, kde to lze (musí jít o otevřené intervaly).
3. Prokontrolujeme **podmínky** derivování, kraje definičních oborů, zlomky, místa, kde se lámeme předpis... a identifikujeme **problémové body**.
Častí podezřelí: $\arcsin t$, $\arccos t$, $\operatorname{sgn} t$, $|t|$, \max a \min , odmocniny, funkce definované „vidličkou“.
4. V daných bodech najdeme derivaci **z definice** nebo z **Věty 4**. Neexistuje-li derivace, zkusíme najít alespoň **jednostranné derivace**.
5. Uděláme **závěr**.

Příklady

Spočtěte derivace (příp. jednostranné derivace) následujících funkcí

1. Zdroje: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA101-1920/Cv22%20-%20Derivace%202.pdf>
<https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF>
<https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = \arccos(1 - x^2) & \text{(d)} f(x) = x^2 e^{-|x-1|} \\ \text{(b)} f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases} & \text{(e)} f(x) = \sqrt[3]{\sin x} \\ \text{(c)} f(x) = \min\{x, x^3\} & \text{(f)} f(x) = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \end{array}$$

Zkouškové příklady

doc. Zeleného: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/fsv/mat1/pisemky/m1-97-98.pdf>

prof. Spurného <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma1.php>

$$\begin{array}{ll} 2. \text{(a)} f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)(\arctan(x + 2))^4 & \text{(e)} f(x) = \arccos \frac{1}{1 + x^2} \\ \text{(b)} f(x) = \begin{cases} \arctan(\tan^2 x), & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases} & \text{(f)} f(x) = \begin{cases} x^2 (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \\ \text{(c)} f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}} & \text{(g)} f(x) = \max\{x + 4 \arctan(\sin x), x\} \\ \text{(d)} f(x) = \max\left\{\min\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}, -\frac{1}{2}\right\} \end{array}$$

Bonus

$$3. \text{ Uvažujte funkce } f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že

- (a) $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f + g)'(0)$ neexistuje.
(b) výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale $(fg)'(0)$ neexistuje.

$$4. \text{ Nechť } f(x) = 1 \text{ a } g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že výraz $\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$ má smysl, ale $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$ neexistuje.

$$5. \text{ Nechť } f(y) = |y| \text{ a } g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že výraz $f'(g(0))g'(0)$ má smysl, ale $(f(g))'(0)$ neexistuje.

6. Najděte taková $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkce byla diferencovatelná (vlastní dce) v každém $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1. \end{cases}$$

7. Kde dělá tazatel chybu?

Given the function:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Question: are we justified to say that the derivative at $f(0)$ exists? If so, what is $f'(0)$? And how do we justify it?

Of course I do realize that the function isn't continuous at $x = 0$ but still since the slope near $x = 0$ seems equal near $0+$ and $0-$ I wondered why we can't say that $f'(0) = 0$

What I tried is this:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(0+h)^2 + 1 - (0^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2}{h} = h = 0 \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(0+h)^2 + 1 - (0^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2}{h} = h = 0 \end{aligned}$$

My conclusion is that since both the right and left limit using the definition of the derivative exist and generate the same answer the limit exists such that $f'(0) = 0$.

Apparently this is not true, so what is my mistake?

Pochází z: <https://math.stackexchange.com/questions/1532014/how-to-apply-the-definition-of-a-derivative-with-a-piecewise-function>