



15. cvičení – Derivace

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a . Značíme $f'(a)$.

Věta 2 (Aritmetika derivací). Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a . Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f , g spojitá v bodě a , pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce). Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O limitě derivací). Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Hinty

$$a^b = e^{b \ln a} \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad \sqrt[b]{x^a} = x^{a/b}$$

Příklady

Spočítejte derivace následujících funkcí, určete definiční obory funkcí i jejich derivací. Případné jednostranné derivace zatím nepočítejte.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. (a) $6x$ | (d) $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ | (g) $\ln x + \frac{\cos x}{\pi}$ |
| (b) $x^3 + 2x - \sin x + 2$ | (e) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^7}$ | (h) $\cot x + \tan x$ |
| (c) $-2 \cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$ | (f) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ | (i) $\arcsin x - 3 \operatorname{arccot} x$ |
| | | (j) $2 \arctan x + \arccos x$ |

2. (a) $x e^x$ (d) $\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$
 (b) $\frac{3x-2}{x^2+1}$ (e) $e^x(x^2-2x+2)$
 (c) $x^2 e^x \sin x$ (f) $\frac{1}{\ln x}$
3. (a) $\operatorname{arccot} 2x$ (j) $\sin(\sin(\sin x))$
 (b) $(3x^2-2x+10)^{10}$ (k) $\ln(\ln^2(\ln^3 x))$
 (c) $\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}$ (l) $\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$
 (d) $\ln^3 x^2$ (m) $2^{\tan \frac{1}{x}}$
 (e) $\sqrt{4-x^2}$ (n) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}$
 (f) $\ln(\sin x)$ (o) $\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}, \quad p, q > 0$
 (g) $\ln \ln(x-3) + \arcsin \frac{x-5}{2}$
 (h) x^x
 (i) $x^{(\sin x)}$
4. (a) $\ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (d) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
 (b) $\operatorname{arccot} \frac{2x}{x^2-1}$ (e) $\sin(\arcsin x)$
 (c) $\sqrt{1+e^{\sqrt{3+x^2}}}$ (f) $\ln(\ln x) + \ln(\ln 2)$
5. Vypočítejte derivace (i jednostranné) následujících funkcí
- (a) $f(x) = x \cdot |x|$ (c) $f(x) = |\ln |x||$
 (b)

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & [1, 2] \\ -(2-x), & (2, \infty) \end{cases}$$

Bonus

6.♥ Zderivujte funkci $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin^2 \pi x$.

I Like Pushing Things to the Limits

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

Figure 1: <https://www.synchroerp.com/news/blog/limit-of-some-function>

(9) Uvažujte interval $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $k \in \mathbb{Z}$ dopočítejte z Věty.