



## 14. cvičení – VOLSF + $f^g$

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Teorie

Následující limity lze počítat přímo použitím exponenciálního triku, totiž postupem využívajícího větu o limitě složené funkce (u níž je pak třeba ověřit podmínky). Lze zapsat

$$\lim_{x \rightarrow a} f^g = \lim_{x \rightarrow a} e^{g \ln f}.$$

Pomocí VOLSF převedeme na výpočet limity

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \ln f).$$

Původní limitu pak dostaneme (za podmínky S nebo P) jako

$$\lim_{y \rightarrow A} e^y,$$

kde  $A = \lim_{x \rightarrow a} (g \ln f)$ .

### Limity typu $1^\infty$

Ukážeme si, jak se tato metoda používá na limity typu  $1^\infty$ . To znamená, že počítáme limitu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ , kde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . Schematicky znázorněno:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln(f(x))} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\frac{\ln(f(x))}{f(x)-1} (f(x)-1)g(x)}$$

Protože  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$ , lze výpočet převést na otázku výpočtu

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 1)g(x).$$

Původní limita se pak dopočte pomocí exponenciály jako výše.

Při výpočtech je pak třeba několikrát použít a **ověřit podmínky VOLSF** a správně aplikovat Aritmetiku limit.

### Příklady

1. Spočtěte limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x$$

2. Spočtěte limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right)^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{1/x}$$

3. Spočtete limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{\ln x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x, a \in \mathbb{R}$$

### Zkouškové příklady

4. Spočtete limity

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{3x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

### Teorie

5. ✿ Necht'  $f$  je funkce spojitá na  $\mathbb{R}$ . Necht' navíc  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{Q}$ . Ukažte, že pak  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .
6. Sestrojte (stačí obrázkem) spojitou nezápornou funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$  takovou, že: pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $0 \in f([n, \infty))$  a  $f$  není omezená na intervalu  $[n, \infty)$ .

(5) Sporem. Pak definice limity.