13. cvičení – Teorie z písemek

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte nebo sestrojte protipříklad):

1. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti.
   (a) Sestrojte a_n a b_n, aby $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 0$.
   (b) Lze sestrojit a_n a b_n, které splňují (a) a navíc $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$?
   (c) Lze sestrojit a_n a b_n, které splňují (a) a navíc $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$?

2. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti.
   (a)❄ Hromadné hodnoty $H(\{a_n\} \subset [-3,3]$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \infty$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty \;\Rightarrow \{a_n\}$ je zdola omezená.

3. Nechť $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ je posloupnost reálných funkcí (pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme jednu funkci) a nechť pro každé $x \in [0,1]$ existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
   (a) Nechť f_n jsou uniformně omezené, tedy $\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1] : |f_n(x)| \leq K$. Musí být f omezená funkce?
   (b)❀ Nechť jsou všechny f_n spojité funkce. Musí být f spojitá funkce?

4. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujme symetrickou limitu funkce jako $s-\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}$.
   (a)✻ $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; s - \lim_{x\to a} = A$?
   (b) $s - \lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} = A$?

5. (a)✿ Nechť existují $\lim_{x\to 0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to 0} g(x) = B \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Existuje $\lim_{x\to 0} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{A, B\}$.
   (b) Nechť existují $\lim_{x\to 0} \max\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to 0} \min\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow$ Existují $\lim_{x\to 0} f(x) =$ a $\lim_{x\to 0} g(x)$

6. (a)❄ Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Dokažte, že pak i funkce $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}, x \in \mathbb{R}$ je spojitá funkce.
   (b) Uvažujme funkci $f_a(x) = x^3 + ax$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Dokažte, že funkce $x \mapsto \operatorname{sgn}(f_a(x)), x \in \mathbb{R}$, není spojitá na $\mathbb{R}$.

7. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí některé z následujících tvrzení:
   (a) Platí $f(\mathbb{R}) = \{0\}$.
   (b) Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.
   (c) Funkce f je omezená na $\mathbb{R}$.

8. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce.

(a) Pokud existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pak existuje $\lim_{n\to\infty} f(n)$.

(b) Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(c)❃ Pokud f je spojitá na $\mathbb{R}$ a existuje $\lim_{n\to\infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(2a) Může být a_n zdola neomezená? Kolik by bylo $\liminf a_n$?
(3b) Uvažujte $f_n(x) = x^n$.
(4a) VOLSF
(5a) předpis pro max je v minulém cviku
(6a) předpis pro max je v minulém cviku
(8c) stačí obrázkem