12. cvičení – VOLSF + log, exp

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O limitě složené funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y\to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(S) f je spojitá v A;

(P) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Fakt

$\alpha > 0, \beta > 0, c > 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1.$$

K odvození

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{c^x} = 0.$$

Hinty

$$a^b = e^{b\log a} \qquad \log a + \log b = \log(ab) \qquad \log a - \log b = \log \tfrac{a}{b}$$

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 - \frac{3}{x}\right)$

(c)✿ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2} - 1}$

(d)♡ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)}$

(e)♣ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

(f) ♡ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^3 - \arctan x)}{\log(x^2 + \arctan x)}$

(g)❄ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,[\log(x+1) - \log x]$

(h)★ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4) - \log x^2}}{\operatorname{arccot} x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$

(k)❀ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2 + e^{3x})}{\log(3 + e^{2x})}$

(l)✻ $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x}$

(m)♠ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$, kde $a>0$.

(n)✿ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}$

(o)❀ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

(p)❋ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)}$

Zkouškové příklady

2. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x)-1}{\log\sqrt{1+x^2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}\left(\log(1+x^3)\right)^2$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(\sqrt{e})^{\sin x}-\cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})}$

Bonus

3. Rozhodněte, zda platí

(TRUE–FALSE) Nechť funkce $f(x)$ není shora omezená v žádném okolí $P(0,\delta)$. Pak $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(TRUE–FALSE) Nechť $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Pak existuje okolí $P(0,\delta)$ takové, že funkce f je zdola omezená na $P(0,\delta)$.

4. Nechť $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jsou funkce. Ukažte, že

$$\max\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$
$$\min\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

(1c) Opatrně na odmocniny - uvnitř musí být kladný výraz.
(1d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen z logaritmu
(1e)Zbavme se odmocniny
(1f) Vytkněte dominantní člen z logaritmu
(1g) Užijte vzorce pro logaritmus
(1h) Sčítací vzorce pro logaritmus
(1k) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen
(1l) Aplikujte základní limitu pro $\arccos x$ a pak vytkněte $\sqrt{e^{2x}}$
(1m) Užijte $a^x = e^{x\log a}$
(1n) Převeďte na základní limitu
(1o) Vytkneme dominantní člen
(1p) Vytkneme dominantní člen