10. cvičení – Limita funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Reálnou funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *okolí bodu* c jako $\mathcal{B}(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$
- *prstencové okolí bodu* c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$

Prstencové okolí bodu $\pm\infty$ definujeme jako

$$P(\infty, \varepsilon) = \mathcal{B}(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty) \qquad P(-\infty, \varepsilon) = \mathcal{B}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$$

Definice 2. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \quad f(x) \in \mathcal{B}(A, \varepsilon).$$

V takovém případě píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Věta 3 (O aritmetice limit)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

(a) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován;

(b) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován;

(c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.

Věta 4. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, $\lim_{x \to c} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce $g(x) > 0$ na $P(c, \eta)$, pak

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Pozn.: Věta má svou variantu i pro jednostranné limity.

Definice 5. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě* a, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Poznámka 6. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a.

Věta 7 (Policajti pro funkce)**.** 1. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a) : \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x \to a} g(x) = A.$$

2. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall\ x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad f(x) \le g(x)$. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Pak

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Věta 8 (O limitě složené funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y\to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek
(S) f je spojitá v A;
(P) $\exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad g(x) \ne A$;
pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Hinty

$$\begin{aligned}
A^2 - B^2 &= (A-B)(A+B)\\
A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2+AB+B^2)\\
A^n - B^n &= (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+A^2B^{n-3}+AB^{n-2}+B^{n-1})\\
A^n + B^n &= (A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-\cdots+A^2B^{n-3}-AB^{n-2}+B^{n-1}),\ n \text{ liché}
\end{aligned}$$

Příklady

Z grafu

1. (a) $\lim_{x\to\infty} x$ (b) $\lim_{x\to-\infty} x^2$ (c) $\lim_{x\to-\infty} x^3$ (d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$ (e) $\lim_{x\to0+} \sqrt{x}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ (g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ (h) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ (i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$ (j) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}$ (k) $\lim_{x\to\infty} e^x$ (l) $\lim_{x\to-\infty} e^x$ (m) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$ (n) $\lim_{x\to0+} \log x$ (o) $\lim_{x\to\infty} \sin x$ (p) $\lim_{x\to0} \cos x$ (q) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x$ (r) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x$ (s) $\lim_{x\to0+} \cot x$ (t) $\lim_{x\to0-} \cot x$

Z definice

2.❀ Určete z **definice** následující limity (či jejich neexistenci)

(a) $\lim_{x\to2}(x+2) = 4$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ (c) $\lim_{x\to2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$ (d) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\ \nexists$ (e) $\lim_{x\to0+} \sin\frac{1}{x}\ \nexists$

Přímo

3. (a) $\lim_{x\to3} \frac{3x+2}{-x+1}$ (b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-4)^2}$ (d) $\lim_{x\to-\infty}(x+3)^2$ (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{-8-x}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x+1}$ (g) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}+\sqrt{x}$

1/0

4. Spočtěte limity, příp. jednostranné limity.

(a) $\lim_{x\to5}\frac{6}{x-5}$

(b) $\lim_{x\to2}\frac{2}{(x-2)^2}$

(c) $\lim_{x\to4}\frac{x^2}{x^2-16}$

(d)♠ $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$

(e) $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}$

0/0

5. Vytkněte výraz s kořenem,

(a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x}$

(c) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

6. Spočtěte limity

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}\cos x$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^3\sin(x^2)$

(d)♡ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to0+}x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

(f)❀ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2+\cos x)$

(h)✾ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x+\sin x$

(i)❄ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^x\cos x$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x}$

(k)♠ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sin x}$

7. Spočtěte limity

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3-x^2+3x-8$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

(d)✤ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(e)❄ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

Bonus

8. Spočtěte limity

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, kde $m,n\in\mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$, kde $n\in\mathbb{N}$

9. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

(a) Nemá limitu v nekonečnu.

(b) Nemá limitu v čísle 3.

(c) Má v nekonečnu limitu nekonečno.

(d) Má v nekonečnu limitu -2.

(e) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.

(f) Není spojitá v 0.

(g) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.

(h) Má vlastní limitu v nekonečnu a je rostoucí.

10. Proč ten vtip není dobře?

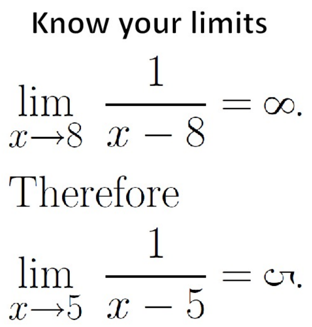

Figure 1: https://kityates.com/public-engagement/

11. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Rozhodněte zda platí:
a) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Potom $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
b) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom je buď $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ nebo $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
c)✻ Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí a. Potom je $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.
d1)♡ Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom vždy existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to a+} \frac{1}{f(x)}$ a $\lim_{x\to a-} \frac{1}{f(x)}$, nemusí se však rovnat.
d2*) ❀ Co když navíc požadujeme, aby $f(x) \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí bodu a ?

12. Spočtěte limity

(a)❃ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

(c) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

(d)✧ $\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, kde $a > 0$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

(f) $\lim_{x\to 0+} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

(g) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$

(2) napište definice (jak vypadá okolí bodu, okolí ∞...
(4d) $x^2+6x+9=(x+3)^2$, $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$
(6d) vytkneme nejrychlejší člen
(6f) vytkneme nejrychlejší člen
(6h) $x+\sin x \geq x-1$
(6i) jak asi vypadá graf?
(6k) je funkce vůbec definovaná na okolí ∞?
(7d) $\sqrt{x^2}=|x|$
(7e) nestačí AL?
(11c) Zkuste definici.
(11d1) Uvažujte např. nějakou oscilující funkci/funkci, co často nabývá 0. Je limita $1/f$ vůbec definovaná?
(11d2) Uvažujte nějakou oscilující funkci, jež jde do 0. Nestačilo by pak předefinovat nulové body?
(12a) vytkneme
(12d) $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$