4. cvičení – Limita posloupnosti

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Podmínky	**Dobře definováno**	**Neurčitý výraz**
$\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$	$-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$	$\infty - \infty$
$\forall a \in \{\infty\} \cup \mathbb{R}$	$\infty + a = a + \infty = \infty$	$\frac{0}{0}$
	$-(\infty) = -\infty, \;\; -(-\infty) = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$	$0 \cdot \infty$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = -\infty$	0^0
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$	1^∞
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$	∞^0
	$1/\infty = 0$, $1/(-\infty) = 0$	$\frac{1}{0}$

Definice 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Věta 2 (Aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}*$. Pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, jsou-li pravé strany definovány.

Věta 3 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\; n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq n_0 :\; a_n \leq c_n \leq\; b_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Věta 4 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Věta 5. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ je posloupnost $\mathbb{R}$ čísel, $a_n \geq 0$. Nechť navíc $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $A \geq 0$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & A = \infty. \end{cases}$$

(Důkaz je ve skriptech.)

Hinty

$$\begin{aligned}
A^2 - B^2 &= (A-B)(A+B) \\
A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2 + AB + B^2) \\
A^n - B^n &= (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1}) \\
(A+B)^n &= A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B\binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n
\end{aligned}$$

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Příklady

1. Určete limity

(a) $\lim_{n\to\infty} n$
(b) $\lim_{n\to\infty} n^2$
(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}$
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$
(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$
(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
(g) $\lim_{n\to\infty} e^n$
(h) $\lim_{n\to\infty} e^{-n}$
(i) $\lim_{n\to\infty} \ln n$
(j) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
(k) $\lim_{n\to\infty} 2^n$
(l) $\lim_{n\to\infty} n!$

2. Určete limity

(a) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$
(b) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$
(c) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$
(d) $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n)\sqrt{n}$

3. Spočtěte limity

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{20}{\sqrt{n}}$
(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}$
(c) $\lim_{n\to\infty} -n^8 + 2n^3 - 4$
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+2n-7}{n^5-6n^2+4}$
(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n-5}{n^3+8}$
(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$
(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)+\cos(n^2)}{n^2-3}$

4. Spočtěte limitu

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$
(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3}-\sqrt{(n+2)^2}}$
(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$
(f)❀ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}}$

5. Spočtěte limity

(a)✽ $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right\}$
(b)❄ $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right\}$
(c)✻ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Bonus

6. Spočtěte limity

(a)★ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$

(b)❀ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}$ kde $|a|, |b| < 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}$

(e)❋ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

(f)✾ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$

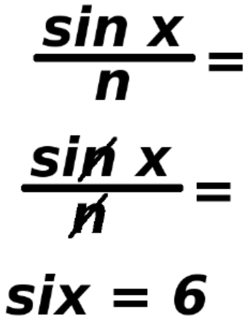

Figure 1: http://laughtingjoke.blogspot.com/2010/04/sin-x.html

(4f) vzorec $A^6 - B^6$
(5a) $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$
(5b) $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(5c) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
(6a) binomická věta
(6b) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$
(6e) $1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$
(6f) $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$