



3. cvičení – Logika a zobrazení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Výroky

Úloha 1. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Úloha 2. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1

Úloha 3. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Úloha 4. Sestavte tauotologie z výroků ve cvičení 1.-3. Kolik jste jich našli?

Řešení:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

Úloha 5. Nechť M je množina osob v posluchárně a necht' $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeformulujte následující výroky do češtiny a pak zkoumejte jejich platnost. Plynou některé výroky z ostatních? (Pozn.: x a y mohou být stejné.)

Příklad: $\exists y \in M \exists x \in M : W(x, y)$ lze zformulovat jako: existuje alespoň jedna osoba y a jedna osoba x , že x zná příjmení osoby y .

Volněji: je tu alespoň jeden člověk y a jeho kamarád*ka x , který*á ho zná příjmením. Výrok bude nejspíš pravdivý.

1. $\forall x \in M \forall y \in M : W(x, y)$

Úplně všichni v posluchárně se navzájem znají příjmením. To nebude pravda.

2. $\forall x \in M \exists y \in M : W(x, y)$

Každý člověk tu zná něčí příjmení. Jelikož x se může rovnat y , tak pravda.

3. $\forall y \in M \exists x \in M : W(x, y)$

Každý tu má někoho, kdo ho zná příjmením. Asi pravda, známe své vlastní příjmení a navíc se navzájem trochu známe (třeba z Albeře).

4. $\exists x \in M \forall y \in M : W(x, y)$

Je tu někdo, kdo zná všechna příjmení. Také nebude pravda.

5. $\exists y \in M \forall x \in M : W(x, y)$

Je tu někdo, jehož příjmení všichni znají. Všichni by měli znát cvičící, takže pravda.

Úloha 6. Uvažujme výrok: Necht' $n \in \mathbb{N}$. Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché. Jaké tvrzení budeme dokazovat při důkazu

Řešení:

1. přímo; Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché.
2. nepřímo; Jestliže n je sudé, pak n^2 je také sudé.
3. sporem: n^2 je liché a zároveň n je sudé.

Zkuste tvrzení dokázat alespoň jednou metodou.

Například nepřímo, tedy dokazujeme výrok

Jestliže n je sudé, pak n^2 je také sudé.

Předpokládejme tedy, že n je sudé. Tedy se dá zapsat jako $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Pak $n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k)$. Tedy jsme n^2 vyjádřili jako sudé číslo - dělitelné dvěma. Jsme hotovi.

Úloha 7. Dokažte

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 1/\sqrt{n} < \varepsilon$

Řešení: Mějme $\varepsilon > 0$. Nejprve najděme takové n_0 , že $1/\sqrt{n_0} < \varepsilon$.

Tedy potřebujeme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n_0}} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< \sqrt{n_0} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} &< n_0 \end{aligned}$$

Zvolme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0$$

Pak pro každé $n \geq n_0$ dostaneme

$$\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0 \leq n,$$

což jsme potřebovali.

2. $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \log n \geq k$

Řešení: Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Budeme hledat takové n_0 , že $\log n_0 \geq k$. Tedy

$$\begin{aligned} \log n_0 &\geq k \\ n_0 &\geq e^k \end{aligned}$$

Zvolme tedy takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$n_0 \geq e^k$$

Pak pro každé $n \geq n_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\geq e^k \\ \log n &\geq \log e^k \\ \log n &\geq k, \end{aligned}$$

což bylo dokázati.

Úloha 8. Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

1. $\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$

Řešení: Negace:

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| \geq \varepsilon$$

Důkaz: fixujme $A \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (stačí nám najít jedno konkrétní ε). Fixujme $n_0 \in \mathbb{N}$. Nyní hledáme takové $n \geq n_0$, že $|(-1)^n - A| \geq \frac{1}{4}$.

Tvrdíme, že lze zvolit buď $n = n_0$ nebo $n = n_0 + 1$ a alespoň pro jedno z nich platí, že $|(-1)^n - A| \geq \frac{1}{4}$.

Kdyby ne, tak zároveň platí, že

$$|-1 - A| < \frac{1}{4} \text{ a } |1 - A| < \frac{1}{4},$$

což není možné.

2. $\forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n \geq k$

Řešení: Negace:

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n < k$$

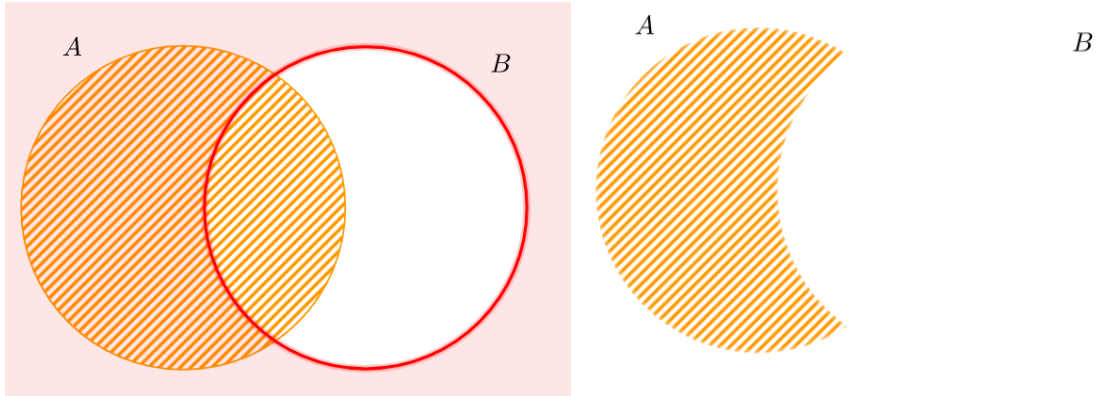
Důkaz: Zvolme $k \in \mathbb{N}$ libovolné, např. $k = 42$. Pak zafixujme $n_0 \in \mathbb{N}$ a hledáme takové $n \geq n_0$, aby $(-1)^n n < k$. Stačí ale vzít libovolné $n \geq n_0$ liché, protože pak

$$(-1)^n n = -n < 42.$$

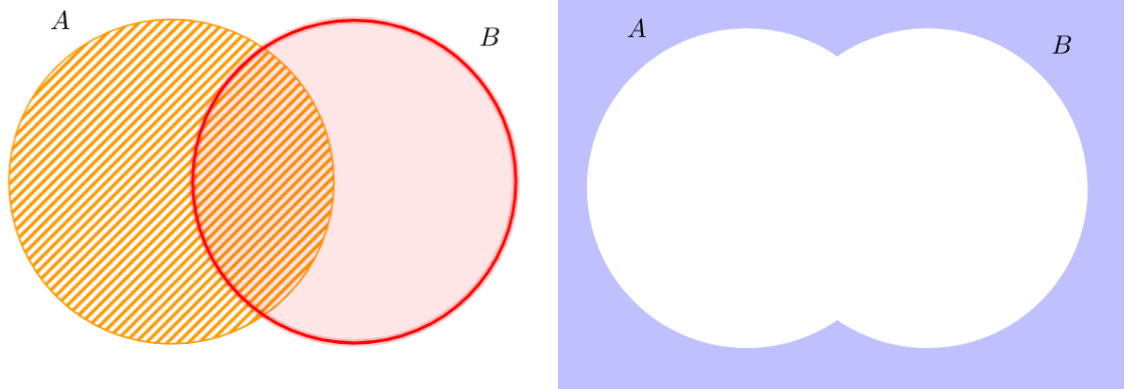
2 Množiny a relace

Úloha 9. Necht' A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

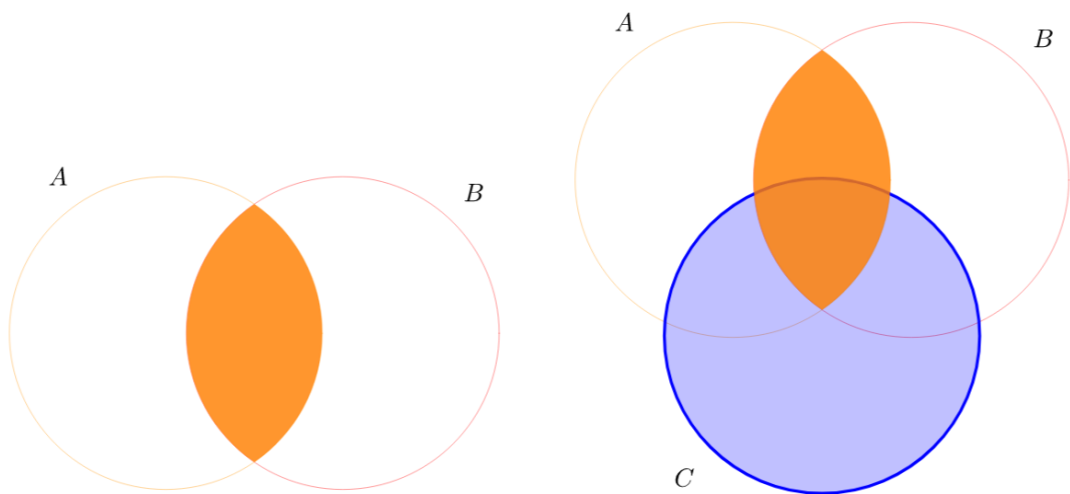
1. $A \cap B^c$



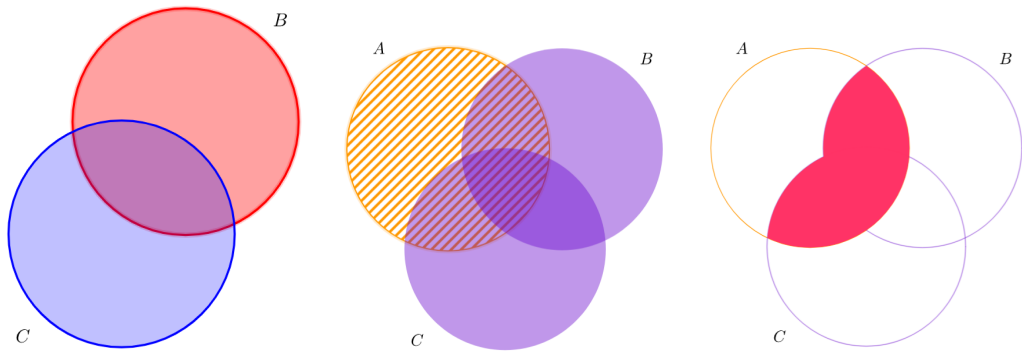
2. $(A \cup B)^c$



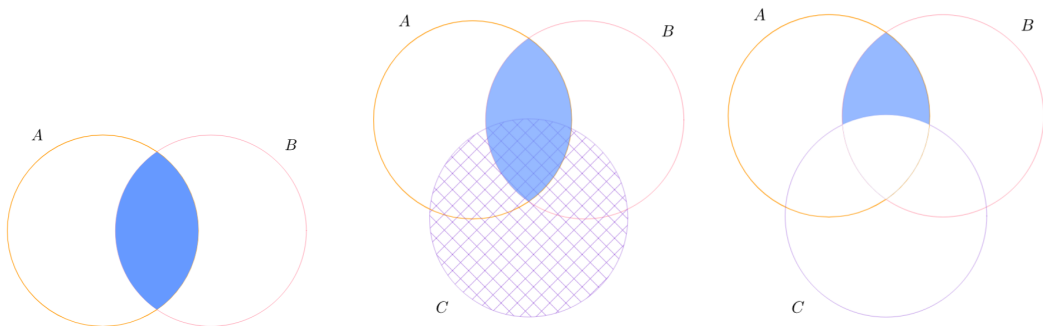
3. $(A \cap B) \cup C$



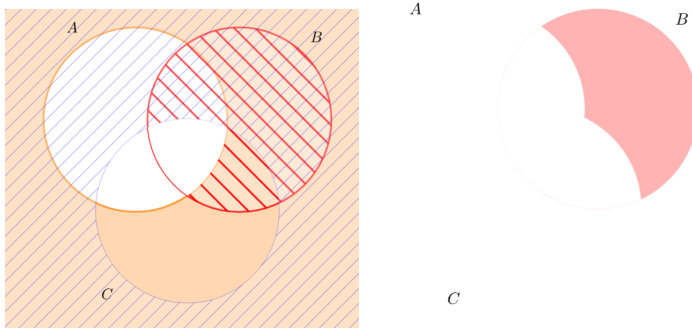
4. $A \cap (B \cup C)$



5. $(A \cap B) \setminus C$



6. $A^c \cap B \cap C^c$



Úloha 10. Najděte předpis pro následující diagram

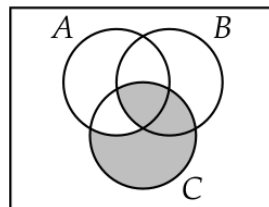


Figure 1: <http://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi-tablet.pdf>

Řešení:

$$(B \cap C) \cup (C \cap A^c)$$

Úloha 11. Ukažte, že pro symetrický rozdíl $A\Delta B$ množin A a B platí

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Řešení:

Potřebujeme ukázat dvě inkluze

•

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Nechť $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \in B$ a zároveň $x \notin A \cap B$.

Pak $x \in B$, ale $x \notin A$ (protože $x \notin A \cap B$). Tedy $x \in B \setminus A$.

(Situace $x \in A$ analogicky.)

•

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \supseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Nechť $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Potřebujeme ukázat, že pak $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \in A$ a zároveň $x \notin B$.

Pak zjevně $x \in A \subset A \cup B$.

Zároveň $x \notin B$, tedy $x \notin A \cap B \subset B$.

(Situace $x \in B$, $x \notin A$ se ukáže analogicky.)

Definice 12. Necht' A_1, \dots, A_n jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n]; \forall i \in \{1, \dots, n\}: a_i \in A_i\},$$

tedy množinu uspořádaných n -tic $[a_1, \dots, a_n]$.

- *Binární relací* R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi* A a B nebo o *relaci z* A *do* B . Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace R značíme $[a, b] \in R$ nebo aRb .

Úloha 13. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

Řešení: Pravda.

" \Leftarrow " zjevně

" \Rightarrow ": Zvolme $x \in A$. Chceme ukázat, že také $x \in B$.

Máme: $A \cap B = A$. Tedy máme i $A \cap B \supseteq A$.

Jinými slovy: jestliže nějaké $x \in A$, pak také $x \in A \wedge x \in B$. Což jsme ale chtěli.

2. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

Řešení: Pravda.

" \Leftarrow " zjevně

" \Rightarrow ":

Zvolme $x \in A$. Chceme ukázat, že také $x \in B$.

Máme: $A \cup B = B$. Tedy máme i $A \cup B \subseteq B$.

Jinými slovy: jestliže nějaké $x \in A \vee x \in B$, pak také $x \in B$. Což jsme ale chtěli.

3. $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$

Řešení: Neplatí. Protipříkladem: $B = (0, 2)$, $C = (1, 3)$, $A = (0, 3)$. Pak $A = B \cup C$ ale $A \setminus B = [2, 3) \neq C$.

4. $X \times Y = Y \times X$

Řešení: Neplatí. Např. množiny $X = \{1, 2, 3\}$ a $Y = \{8, 9\}$. Pak

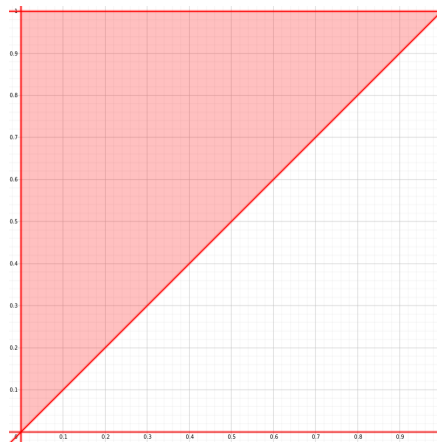
$$X \times Y = \{[1, 8], [1, 9], [2, 8], [2, 9], [3, 8], [3, 9]\}$$

ale

$$X \times Y = \{[8, 1], [8, 2], [8, 3], [9, 1], [9, 2], [9, 3]\}$$

Úloha 14. Nerovnost mezi reálnými čísly „ \leq “ tvoří binární relaci na $[0, 1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.

Řešení:



Úloha 15. Necht A je množina všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$ a relace R je být vlastní podmnožinou, tedy $X R Y$ právě tehdy, když $X \subsetneq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci R jako množinu uspořádaných dvojic.

Řešení: Nejprve rozepíšeme množinu A . Tedy

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Můžeme pak např. říci, že $\emptyset \subset \{1\}$. Nebo $\{1\} \subset \{1, 2\}$. Všechny tyto dvojice pak zapíšeme jako relaci

$$R = \{[\emptyset, \{1\}], [\emptyset, \{2\}], [\emptyset, \{1, 2\}], [\{1\}, \{1, 2\}], [\{2\}, \{1, 2\}]\}$$

Definice 16. Necht R je relace na množině X . Řekneme, že R je

- *symetrická*, jestliže

$$\forall x, y \in X; x R y \Rightarrow y R x$$

- *antisymetrická*, jestliže

$$\forall x, y \in X; x R y \Rightarrow \neg y R x$$

- *tranzitivní*, jestliže

$$\forall x, y, z \in X; x R y \ \& \ y R z \Rightarrow x R z$$

- reflexivní, jestliže

$$\forall x \in X; x R x$$

Úloha 17. Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

1. A je množina lidí, R je relace "býti rodičem"

Řešení: Je antisymetrická, není symetrická, reflexivní, tranzitivní.

2. A je množina celých čísel, $i R j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$.

Řešení: Je symetrická, není antisymetrická, reflexivní, tranzitivní.

3. $A = \mathbb{N}$, $i R j$ právě tehdy, když $i \cdot j$ je sudé.

Řešení: Je symetrická, není antisymetrická, reflexivní, tranzitivní.

3 Zobrazení

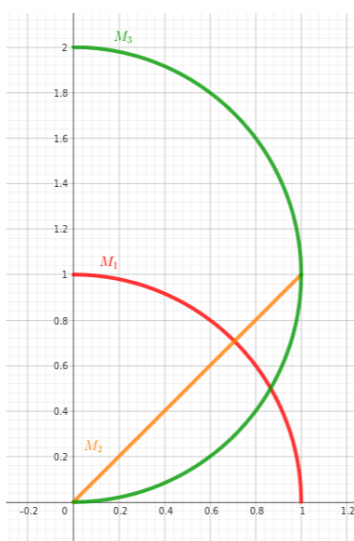
Definice 18. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B (a zpravidla značíme $F : A \rightarrow B$), jestliže platí

$$\forall x \in A \forall y_1, y_2 \in B: (([x, y_1] \in F \ \& \ [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$

Úloha 19. Necht' $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

1. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B; x^2 + y^2 = 1\}$
2. $M_2 = \{[x, y] \in A \times B; y - x = 0\}$
3. $M_3 = \{[x, y] \in A \times B; x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$

Řešení: Ano, ano, ne



Úloha 20. Ukažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní.

Řešení: Je asociativní, neboli uvažujme zobrazení $f : W \rightarrow X$, $g : X \rightarrow Y$ a $h : Y \rightarrow Z$. Asociativní: nezáleží na uzávorkování, tedy

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Ale to je pravda, protože

$$(h(g))(f(w)) = h(g(f(w))).$$

Není komutativní: nelze prohodit pořadí. Např. funkce $f = x^2$, $g = 3x$. Pak

$$f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$$

ale

$$g(f(x)) = 3(x)^2 = 3x^2$$

Definice 21. Necht' A a B jsou množiny a necht' $f : A \rightarrow B$ je zobrazení.

- Necht' $M \subset A$. Pak množinu

$$f(M) = \{y \in B; \exists x \in M: f(x) = y\}$$

nazýváme *obrazem množiny M* při zobrazení f .

- Necht' P je libovolná množina. Pak množinu

$$f^{-1}(P) = \{x \in A; f(x) \in P\}$$

nazýváme *vzorem množiny P* při zobrazení f .

Úloha 22. Necht' $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení, necht' $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že

$$f^{-1}(f(A)) = A, \quad f(f^{-1}(B)) = B \quad ?$$

Platí některá z inkluzí \subset či \supset ?

Řešení:

1. Ani jedno tvrzení neplatí.

(a) Protipříklad: zvolme $f(x) = x^2$, $A = [0, 2]$. Pak $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2] \neq A$.

(b) Protipříklad: zvolme $f(x) = x^2$, $B = [-4, 4]$. Pak $f(f^{-1}(B)) = f([-2, 2]) = [0, 4] \neq B$.

2. Ale platí inkluze $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ a $B \supseteq f(f^{-1}(B))$.

(a) Zvolme $x \in A$, potřebujeme ukázat, že $x \in f^{-1}(f(A))$. Postupujme sporem: tedy uvažujme takové $x \in A$, že $x \notin f^{-1}(f(A))$.

Jestliže $x \in A$, tak $f(x) \in f(A)$, neboli existuje $y \in f(A) : f(x) = y$.

Zároveň jestliže $x \notin f^{-1}(f(A))$, tak platí, že pro všechna $y \in f(A) : f(x) \neq y$.

Což je spor.

- (b) Analogicky. Zvolme $y \in f(f^{-1}(B))$, potřebujeme ukázat, že $y \in B$. Postupujeme sporem: tedy uvažujeme takové $y \in f(f^{-1}(B))$, že $y \notin B$. Jestliže $y \in f(f^{-1}(B))$, tak existuje $x \in f^{-1}(B) : f(x) = y$. Zároveň $f(x) = y \notin B$. Tedy zatím máme: $x \in f^{-1}(B)$, neboli existuje $z \in B$ takové, že $f(x) = z$. Tedy $f(x) \in B$. Což je spor.

Úloha 23. Necht' $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení? Platí alespoň jedna inkluze?

1. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

Řešení:

- (a) Dokažme $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.
Zvolme $y \in f(A \cup B)$. Chceme ukázat, že $y \in f(A) \cup f(B)$.
Pro toto y existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$ a tedy $f(x) \in f(A)$ nebo $x \in B$ a $f(x) \in f(B)$ (nebo obojí). V obou případech je $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.
- (b) Dokažme $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$.
Zvolme $y \in f(A) \cup f(B)$. Chceme ukázat, že $y \in f(A \cup B)$.
Platí buď $y \in f(A)$ nebo $y \in f(B)$ (nebo obojí najednou). Uvažujeme nejprve variantu $y \in f(A)$.
Tedy existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak ale i $x \in A \cup B$. Tedy $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
Variantu $y \in f(B)$ řešíme analogicky.
Tedy $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$.

2. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

Řešení:

- (a) Platí $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
Zvolme $y \in f(A \cap B)$. Chceme ukázat, že $y \in f(A) \cap f(B)$.
Pro toto y existuje $x \in A \cap B$ takové, že $f(x) = y$. Pak $x \in A$ a zároveň $x \in B$.
Tedy $f(x) \in f(A)$ a zároveň $f(x) \in f(B)$. Tedy $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Tedy $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
- (b) Opačná inkluze neplatí. Protipříklad: Uvažujeme konstantní zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Dále položíme $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$. Pak $A \cap B = \emptyset$, tedy $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$. Ale $f(A) = \{1\}$ i $f(B) = \{1\}$, tedy $f(A) \cap f(B) = \{1\}$.
Tedy $f(A \cap B) \not\supseteq f(A) \cap f(B)$ a tedy ani $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

3. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

Řešení:

- (a) Dokažme $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
K tomuto x existuje $y \in A \cup B$ tak, že $f(x) = y$. Pak buď $y \in A$ a tedy $x \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ nebo $y \in B$ a tedy $x \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
V obou případech jsme hotovi.

(b) Dokažme $f^{-1}(A \cup B) \supseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Pak buď $x \in f^{-1}(A)$ nebo $x \in f^{-1}(B)$. Necht' $x \in f^{-1}(A)$.

Pak existuje $y \in A$ tak, že $f(x) = y$. Ale pak $y \in A \cup B$ a tedy $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Případ $x \in f^{-1}(B)$ je analogický.

Tedy $f^{-1}(A \cup B) \supseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

4. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Řešení:

(a) Dokažme $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

K tomuto x existuje $y \in A \cap B$ tak, že $f(x) = y$.

Pak $y \in A$ a zároveň $y \in B$, tedy $x \in f^{-1}(A)$ a zároveň $x \in f^{-1}(B)$. Tedy $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(b) Dokažme $f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Pak $x \in f^{-1}(A)$ a zároveň $x \in f^{-1}(B)$.

Pak existuje $y \in A$ tak, že $f(x) = y$. Zároveň existuje $z \in B$ tak, že $f(x) = z$. Protože f je zobrazení, tak $z = y$. Tedy $y \in A \cap B$. Tedy $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Tedy $f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Definice 24. Necht' A a B jsou množiny a necht' $f : A \rightarrow B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že f je *prosté (injektivní)*, jestliže

$$\forall x, y \in A: (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

(2) Řekneme, že f je „na“ (*surjektivní*), jestliže

$$\forall y \in B \exists x \in A: f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že f je *bijekce (vzájemně jednoznačné)*, jestliže je zároveň prosté a „na“.

Úloha 25. Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$. Je zobrazení f prosté, na? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?

Řešení: Obrazy daných množin jsou popořadě $[0, 16]$, $[0, 16]$, $[0, 16]$.

Vzory jsou $[-2, 2]$, $\{0\}$, $[-2, 2]$.

Zobrazení f zjevně není prosté, nemá tedy invers.

Oproti tomu zobrazení g je prosté a má invers.

Úloha 26. Najděte zobrazení, která zobrazují:

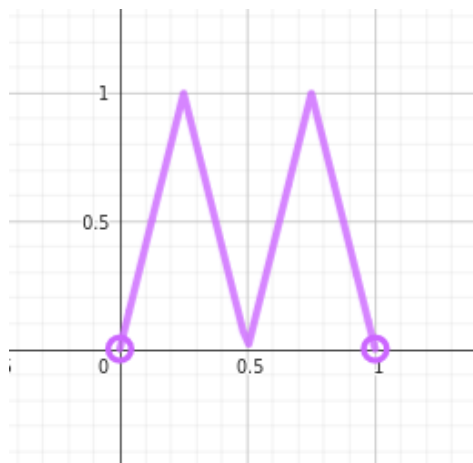
1. interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,

Řešení: Např.

$$f(x) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2}x), & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

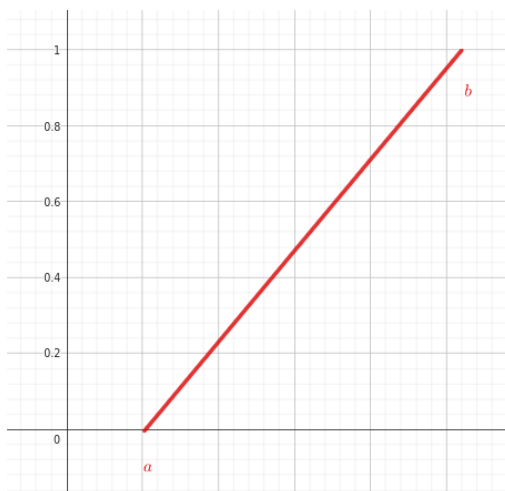
2. interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$,

Řešení:



3. interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.

Řešení:



Hledáme přímku o rovnici $y = px + q$, kde

$$0 = pa + q$$

$$1 = pb + q$$

Vyřešíme vzhledem k p, q a dostaneme

$$p = \frac{1}{b - a}$$

$$q = \frac{-a}{b - a}$$

Dohromady pak

$$f(x) = \frac{x}{b - a} - \frac{a}{b - a}.$$