3. cvičení – Logika a zobrazení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Výroky

Úloha 1. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

Úloha 2. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

Úloha 3. Doplňte tabulku výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
0	0	1	1				

Úloha 4. Sestavte tauotologie z výroků ve cvičení 1.-3. Kolik jste jich našli?

Úloha 5. Nechť M je množina osob v této posluchárně a nechť $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeformulujte následující výroky do češtiny a pak zkoumejte jejich platnost. Plynou některé výroky z ostatních? (Pozn.: x a y mohou být stejné.)

Příklad: $\exists y \in M\, \exists x \in M : W(x, y)$ lze zformulovat jako: existuje alespoň jedna osoba y a jedna osoba x, že x zná příjmení osoby y.

Volněji: je tu alespoň jeden člověk y a jeho kamarád*ka x, který*á ho zná příjmením. Výrok bude nejspíš pravdivý.

1. $\forall x \in M\, \forall y \in M : W(x, y)$
2. $\forall x \in M\, \exists y \in M : W(x, y)$
3. $\forall y \in M\, \exists x \in M : W(x, y)$
4. $\exists x \in M\, \forall y \in M : W(x, y)$
5. $\exists y \in M\, \forall x \in M : W(x, y)$

Úloha 6. Uvažujme výrok: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže n^2 je liché, pak n je také liché. Jaké tvrzení budeme dokazovat při důkazu

1. přímo;
2. nepřímo;
3. sporem?

Zkuste tvrzení dokázat alespoň jednou metodou.

Úloha 7. Dokažte

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 : 1/\sqrt{n} < \varepsilon$
2. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 : \log n \geq k$

Úloha 8. Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

1. $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$
2. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0 : (-1)^n n \geq k$

---

2 Množiny a relace

Úloha 9. Nechť A, B, C jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

1. $A \cap B^c$
2. $(A \cup B)^c$
3. $(A \cap B) \cup C$
4. $A \cap (B \cup C)$
5. $(A \cap B) \setminus C$
6. $A^c \cap B \cap C^c$

Úloha 10. Najděte předpis pro následující diagram

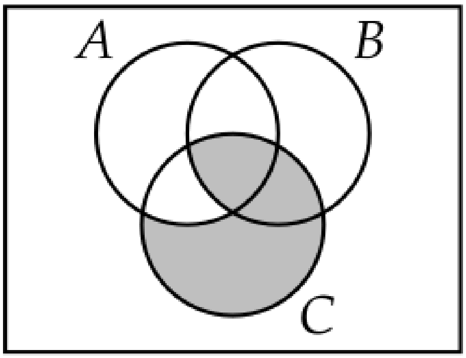

Figure 1: http://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi-tablet.pdf

Úloha 11. Symetrický rozdíl množin A a B je definován jako

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ukažte, že platí

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(Pozn.: je třeba ukázat dvě inkluze „$\subseteq$“ a „$\supseteq$“. Nejprve předpokládejte, že $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ a chceme ukázat, že potom také $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. A pak naopak.)

Definice 12. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \ldots, a_n];\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \in A_i\},$$

tedy množinu uspořádaných n-tic $[a_1, \ldots, a_n]$.

- *Binární relací* R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi A a B* nebo o *relaci z A do B*. Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace R značíme $[a, b] \in R$ nebo aRb.

Úloha 13. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $(A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \subset B)$
2. $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \subset B)$
3. $(A \setminus B = C) \Leftrightarrow (A = B \cup C)$
4. $(X \times Y) = (Y \times X)$

Úloha 14. Nerovnost mezi reálnými čísly „$\leq$" tvoří binární relaci na $[0, 1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.

Úloha 15. Nechť A je množina všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$ a relace R je býti vlastní podmnožinou, tedy $X\,R\,Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci R jako množinu uspořádaných dvojic.

Definice 16. Nechť R je relace na množině X. Řekneme, že R je

- *symetrická*, jestliže $\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
- *antisymetrická*, jestliže $\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow \neg\ y\,R\,x$
- *tranzitivní*, jestliže $\forall x, y, z \in X;\ x\,R\,y \ \&\ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$
- *reflexivní*, jestliže $\forall x \in X;\ x\,R\,x$

Úloha 17. Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

1. A je množina lidí, R je relace "býti rodičem"
2. A je množina celých čísel, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$.
3. $A = \mathbb{N}$, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $i \cdot j$ je sudé.

---

3 Zobrazení

Definice 18. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B (a zpravidla značíme $F : A \to B$), jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon\ (([x, y_1] \in F\ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$

Úloha 19. Nechť $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

1. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + y^2 = 1\}$
2. $M_2 = \{[x, y] \in A \times B;\ y - x = 0\}$
3. $M_3 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$

Úloha 20. Ukažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní. (Asociativní: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Komutativní: $f(g(x)) = g(f(x))$.)

Definice 21. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu

  $$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon\ f(x) = y\}$$

  nazýváme *obrazem množiny* M při zobrazení f.
- Nechť P je libovolná množina. Pak množinu

  $$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$

  nazýváme *vzorem množiny* P při zobrazení f.

Úloha 22. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, nechť $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že

$$f^{-1}(f(A)) = A, \qquad f(f^{-1}(B)) = B \qquad ?$$

Platí některá z inkluzí $\subset$ či $\supset$?
(Výrazem f^{-1} nemyslíme inverzní funkci, ale vzor.)

Úloha 23. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení? Platí alespoň jedna inkluze?

1. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
3. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
4. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Definice 24. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že f je *prosté* (*injektivní*), jestliže

$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y).$$

(2) Řekneme, že f je *„na“* (*surjektivní*), jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že f je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a „na“.

Úloha 25. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$.

Je zobrazení f prosté, na? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \to [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?

Úloha 26. Najděte zobrazení (stačí obrázkem), která zobrazují:

1. interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,
2. interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$,
3. interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.