2. cvičení – Hyperbolické funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Ukažte, že

   (a) $\cosh x + \sinh x = e^x$
   Řešení:
   $$\cosh x + \sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \cdot 2e^x = e^x$$

   (b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
   Řešení:
   $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})e^x = \frac{1}{2} \cdot 2e^{-x}e^x$$

   (c) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
   $$\begin{aligned}\cosh 2x &= \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})\\ \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2\\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} + e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x})\\ &= \frac{1}{4}(2e^{2x} + 2e^{-2x})\end{aligned}$$

   (d) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
   Řešení:
   $$\begin{aligned}\sinh 2x &= \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})\\ 2 \sinh x \cosh x &= 2\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\\ &= \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})\end{aligned}$$

   (e) $\cosh x$ je sudá funkce
   Řešení:
   $$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \cosh x$$

   (f) $\sinh x$ je lichá funkce
   Řešení:
   $$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\sinh x$$

   (g) $\coth x$ je lichá funkce
   Řešení:
   $$\coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh x}{-\sinh x} = -\coth x$$

(h) $\tanh x$ je lichá funkce
Řešení:

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$$

(i) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Řešení:

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(j) $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
Řešení:

$$1 - \tanh^2 x = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

2. Vyjádřete:

(a) $\sinh(\ln 3)$
Řešení:

$$\sinh(\log 3) = \frac{1}{2}(e^{\log 3} - e^{-\log 3}) = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

(b) $\cosh(\ln 2)$
Řešení:

$$\cosh(\log 2) = \frac{1}{2}(e^{\log 2} + e^{-\log 2}) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$$

(c) $\coth\left(\ln \frac{1}{3}\right)$
Řešení:

$$\coth(\log \frac{1}{3}) = \frac{e^{\log \frac{1}{3}} + e^{-\log \frac{1}{3}}}{e^{\log \frac{1}{3}} - e^{-\log \frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{3} + 3}{\frac{1}{3} - 3} = -\frac{5}{4}$$

3. Řešte rovnice s neznámou x (bez použití arg funkcí):

(a) $\sinh x = \frac{3}{4}$
Řešení: Protože $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ a navíc $\cosh x \geq 0$, tak máme

$$\cosh x = \frac{5}{4}$$

Navíc $\sinh x + \cosh x = e^x$, tedy

$$e^x = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$$

Odtud

$$x = \log 2.$$

(b) $\cosh x = \frac{13}{5}$
Řešení: Máme

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{13}{5}$$

Položme $y = e^x$. Pak

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{y} &= \frac{26}{5} \\ y^2 + 1 &= \frac{26}{5} y \\ y^2 - \frac{26}{5} y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Z kvadratické rovnice tedy dostáváme

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{\frac{26}{5} \pm \sqrt{\frac{26^2}{25} - 4}}{2} \\ &= \frac{\frac{26}{5} \pm \sqrt{\frac{676}{25} - \frac{100}{25}}}{2} \\ &= \frac{\frac{26}{5} \pm \frac{24}{25}}{2} \\ &= \begin{cases} 5, \\ \frac{1}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtud

$$x_1 = \log 5$$
$$x_2 = -\log 5$$

(c) $2 \cosh 2x + 10 \sinh 2x = 5$
Řešení:

$$\begin{aligned} 2 \cosh 2x + 10 \sinh 2x &= 5 \\ e^{2x} + e^{-2x} + 5e^{2x} - 5e^{-2x} &= 5 \\ 6e^{2x} - 4e^{-2x} - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Položme $y = e^{2x}$. Pak

$$\begin{aligned} 6y - \frac{4}{y} - 5 &= 0 \\ 6y^2 - 4 - 5y &= 0 \\ (3y - 4)(2y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy $y_1 = \frac{4}{3}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.
Odtud

$$\begin{aligned} e^{2x_1} &= \frac{4}{3} \\ 2x_1 &= \log \frac{4}{3} \\ x_1 &= \frac{1}{2} \log \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Pro $e^{2x} = -\frac{1}{2}$ nemá rovnice řešení.

(d) $4 \cosh x + \sinh x = 4$
Řešení:

$$\begin{aligned} 4(e^x + e^{-x}) + e^x - e^{-x} &= 4 \cdot 2 \\ 5e^x + 3e^{-x} &= 8 \end{aligned}$$

Položme $y = e^x$, pak

$$5y + \frac{3}{y} = 8$$
$$5y^2 - 8y + 3 = 0.$$

Pak

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = \frac{3}{5}.$$

Tedy $x_1 = 0$, $x_2 = \log \frac{3}{5} = \log 3 - \log 5$.

4. Víte-li, že $\sinh x = \frac{5}{12}$, určete

   (a) $\cosh x$
   Řešení: Máme $|\cosh x| = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$, navíc $\cosh x \geq 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, tedy

   $$\cosh x = \sqrt{1 + \frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12}$$

   (b) $\coth x$
   Řešení:

   $$\coth x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{13}{5}$$

   (c) $\tanh x$
   Řešení:

   $$\tanh x = \frac{1}{\coth x} = \frac{5}{13}$$

   (d) $\sinh 2x$
   Řešení:

   $$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x = 2 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{13}{12} = \frac{65}{72}$$

   (e) $\cosh 2x$
   Řešení:

   $$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{13^2}{12^2} + \frac{5^2}{12^2} = \frac{194}{1}44 = \frac{97}{72}$$

5. Ukažte, že $\operatorname{arg\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

   Řešení: Uvažujme

   $$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

   Položme $z = e^x$. Pak

   $$2y = z - \frac{1}{z}$$
   $$2yz = z^2 - 1$$
   $$0 = z^2 = 2yz - 1$$

   Tedy

   $$z_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$$
   $$= y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Platí $z_2 = y - \sqrt{y^2+1} < 0$. Ale $z = e^x > 0$, tedy tento kořen není řešením.
Dále

$$z_1 = y + \sqrt{y^2+1} = e^x$$

pak

$$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

6. Vyjádřete za pomoci logaritmu
   (a) $\arg\sinh \frac{3}{4}$
   Řešení:
   $$\arg\sinh \frac{3}{4} = \log\left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}+1}\right) = \log 2$$
   (b) $\arg\cosh 2$
   Řešení:
   $$\arg\cosh 2 = \log\left(2 + \sqrt{2^2-1}\right) = \log(2+\sqrt{3})$$
   (c) $\arg\tanh \frac{1}{2}$
   Řešení:
   $$\arg\tanh \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log 3$$
7. Uvažujme $\theta \in \mathbb{R}$ a položme $x = 2\cosh\theta$. Vyjádřete $4\cosh\theta\sinh\theta$.
   Řešení: Máme
   $$\sinh^2\theta = \cosh^2\theta - 1 = \frac{x^2}{4} - 1 = \frac{x^2-4}{4}$$
   Tedy
   $$|\sinh\theta| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$$
   Dohromady
   $$4\cosh\theta\sinh\theta = \operatorname{sgn}(\theta)\cdot x\sqrt{x^2-4},$$
   kde $\operatorname{sgn}(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta > 0, \\ 0, & \theta = 0, \\ -1, & \theta < 0. \end{cases}$