

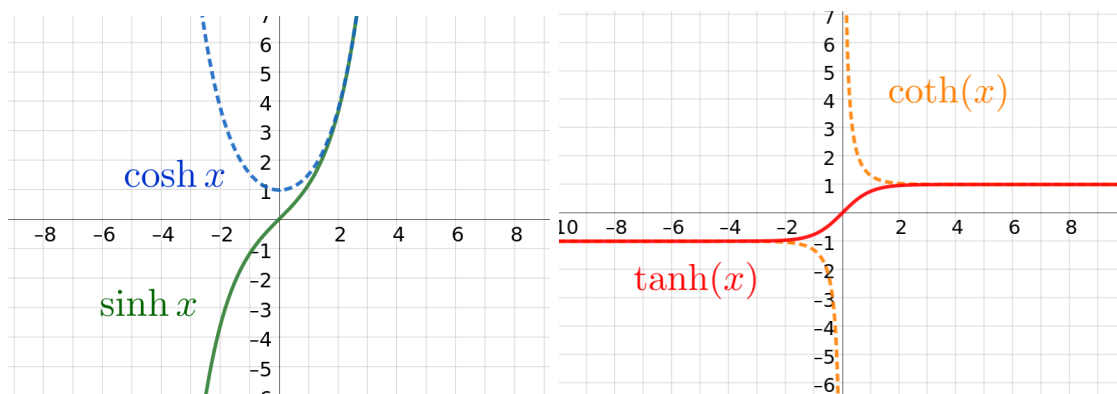


2. cvičení – Hyperbolické funkce

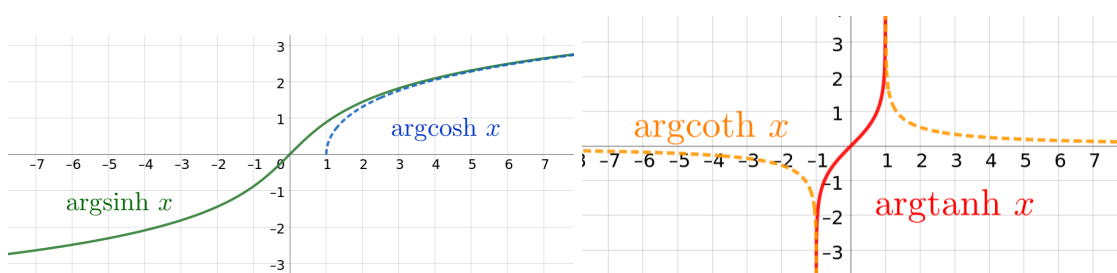
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$\arg \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$\arg \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \arg \coth x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$



Příklady

1. Ukažte, že

- (a) $\cosh x + \sinh x = e^x$
- (b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
(užijte vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)
- (c) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- (d) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
- (e) $\cosh x$ je sudá funkce
($\cosh(-x) = \cosh(x)$)
- (f) $\sinh x$ je lichá funkce
($\sinh(-x) = -\sinh x$)
- (g) $\coth x$ je lichá funkce
(za pomoci (e) a (f))
- (h) $\tanh x$ je lichá funkce
- (i) $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 + \tanh^2 x$
- (j) $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

2. Vyjádřete:

(a) $\sinh(\ln 3)$ (b) $\cosh(\ln 2)$ (c) $\coth\left(\ln \frac{1}{3}\right)$

3. Řešte rovnice s neznámou x (bez použití arg funkcí):

(a) $\sinh x = \frac{3}{4}$ (c) $2 \cosh 2x + 10 \sinh 2x = 5$
(b) $\cosh x = \frac{13}{5}$ (d) $4 \cosh x + \sinh x = 4$

4. Víte-li, že $\sinh x = \frac{5}{12}$, určete

(a) $\cosh x$ (b) $\coth x$ (c) $\tanh x$ (d) $\sinh 2x$ (e) $\cosh 2x$

5. Ukažte, že $\arg \sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

6. Vyjádřete za pomoci logaritmu (dosaďte do předpisu, nemusíte odvozovat)

(a) $\arg \sinh \frac{3}{4}$ (b) $\arg \cosh 2$ (c) $\arg \tanh \frac{1}{2}$

7. Uvažujme $\theta \in \mathbb{R}$ a položme $x = 2 \cosh \theta$. Vyjádřete $4 \cosh \theta \sinh \theta$.