



1. cvičení – Cyklometrické funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte

(a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

(e) $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

(b) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

(f) $\arctan -1 = -\frac{\pi}{4}$

(c) $\arccos 1 = 0$

(g) $\operatorname{arccot} -1 = \frac{3\pi}{4}$

(d) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

(h) $\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$

2. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí, že $\sin x = \frac{1}{2}$.

Řešení: základní hodnoty: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ Celkem: $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

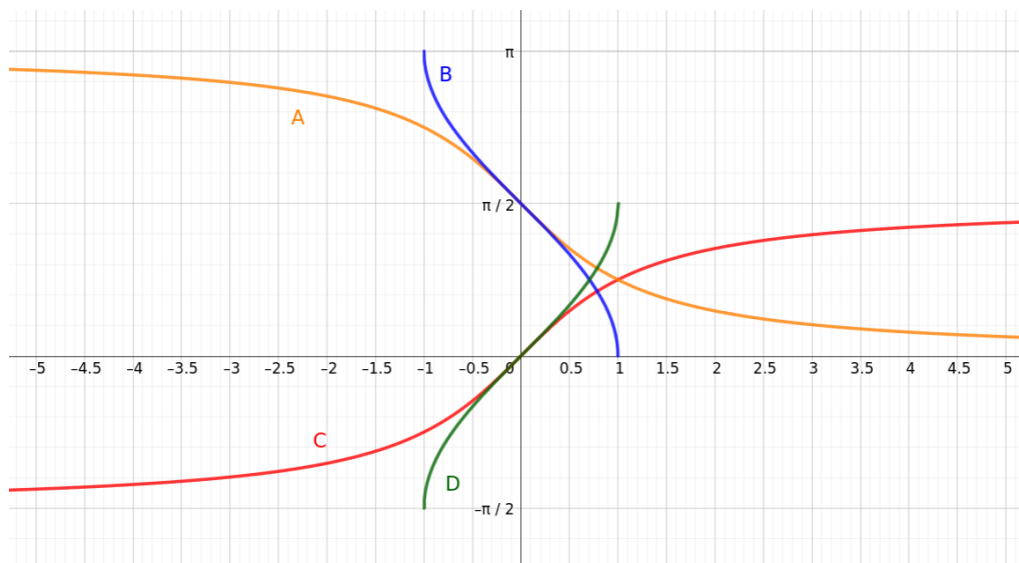
3. Najděte grafy

(a) $\arcsin x$ D zelený

(c) $\arctan x$ C červený

(b) $\arccos x$ B modrý

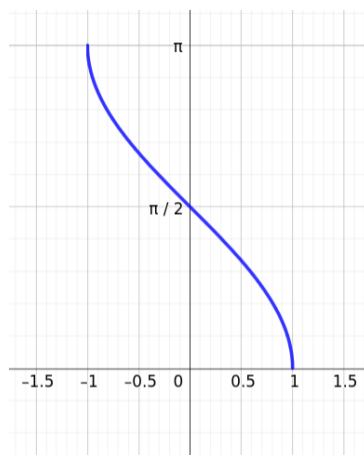
(d) $\operatorname{arccot} x$ A žlutý



4. Který předpis patří k obrázku?

Řešení: Všechny.

- A $\arccos x$
- B $|\arccos x|$
- C $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$
- D $\pi - \arccos(-x)$



5. Najděte pravdivé výroky

ANO $\arcsin(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$

ANO $\sin(\arcsin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$

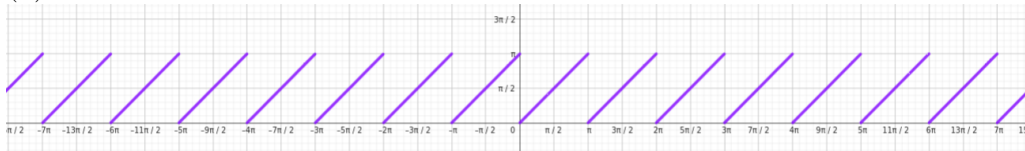
NE $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$ - neplatí

NE $\sin(\arcsin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ - vnitřek vůbec není definován

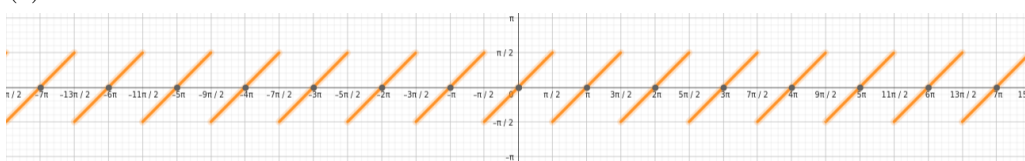
6. Přřadte funkci správný graf

- (a) $\arcsin(\sin x)$ (c) $\arctan(\tan x)$ (e) $\sin(\arcsin x)$ (g) $\tan(\arctan x)$
 (b) $\arccos(\cos x)$ (d) $\operatorname{arccot}(\cot x)$ (f) $\cos(\arccos x)$ (h) $\cot(\operatorname{arccot} x)$

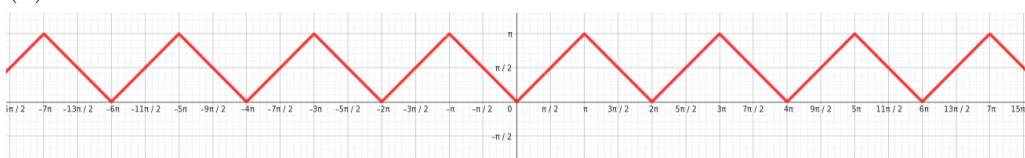
(d)



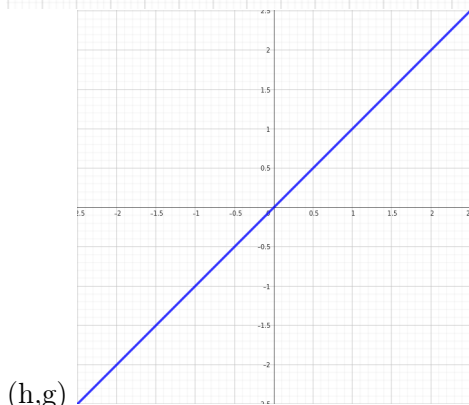
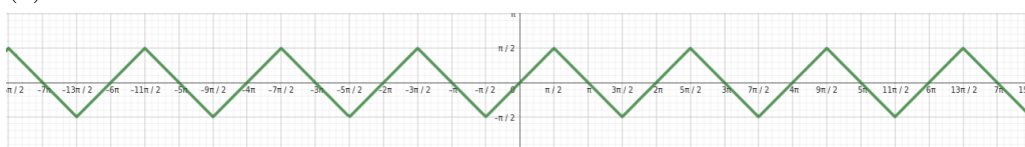
(c)



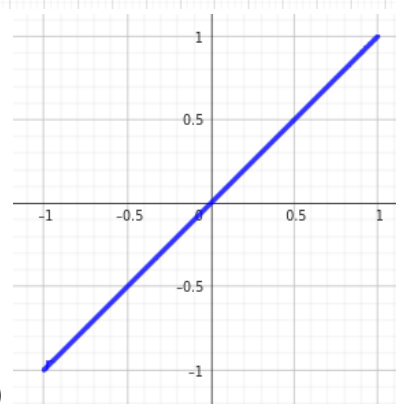
(b)



(a)



(h,g)



(e,f)

7. Najděte předpis

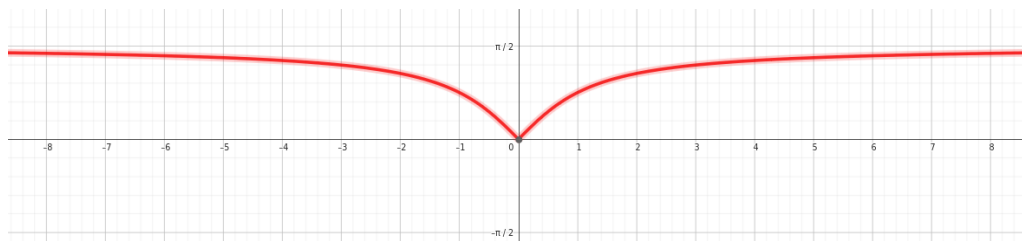
Řešení: ACD

A $\arctan |x|$

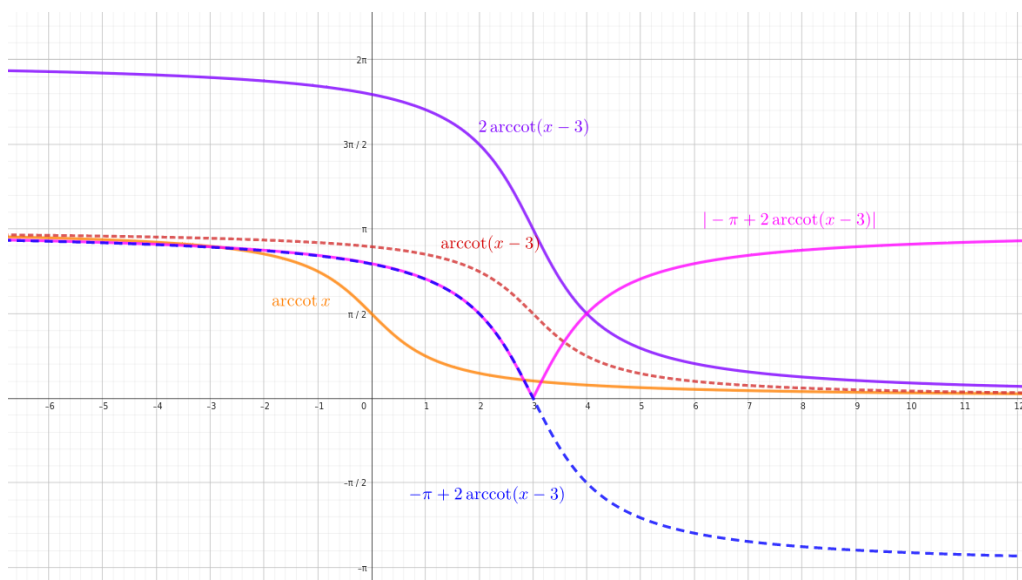
B $\arctan -|x|$

C $|\arctan x|$

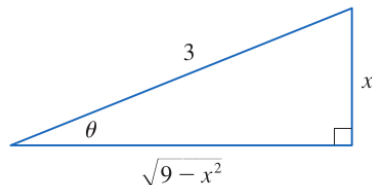
D $|\arctan(-x)|$



8. Načrtněte graf funkce $f(x) = |-\pi + 2 \operatorname{arccot}(x - 3)|$



9. (a) Uvažujme $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a položme $x = 3 \sin \theta$. Porovnejme s obrázkem. Ukažte, že $\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$ a $\cot \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.



https://www.stewartcalculus.com/data/CALCULUS%20Concepts%20and%20Contexts/upfiles/3c3-TrigonometSubstitu_Stu.pdf

Řešení:

Protože pro $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos \theta > 0$, tak platí $|\cos \theta| = \cos \theta$. Tedy máme

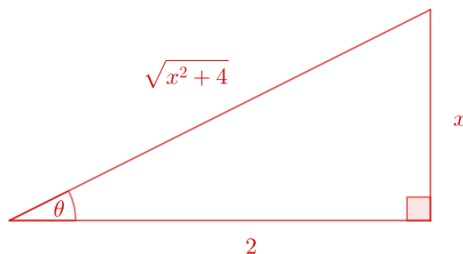
$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \sin^2 \theta} = \sqrt{9(1 - \sin^2 \theta)} = 3\sqrt{\cos^2 \theta} = 3|\cos \theta| = 3 \cos \theta,$$

což jsme chtěli ukázat. Analogicky

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}}{\frac{1}{3}x} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

- (b) Uvažujme $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a položme $x = 2 \tan \theta$. Načrtněte obrázek a ukažte, že $\frac{2}{\cos \theta} = \sqrt{x^2 + 4}$.

Řešení:



Prve ověřme hint:

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Tedy

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \frac{x^2}{4}$$

Pak

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{4 + x^2}{4}$$

Protože pro $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos \theta > 0$, tak platí $|\cos \theta| = \cos \theta$. Tedy máme

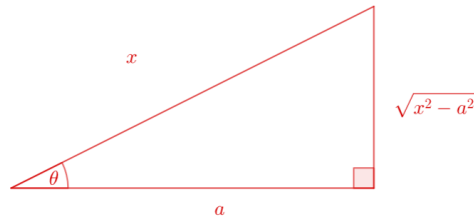
$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}$$

Závěrem

$$\frac{2}{\cos \theta} = \sqrt{4 + x^2}$$

- (c) Uvažujme $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a > 0$ a položme $x = a \frac{1}{\cos \theta}$. Načrtněte obrázek a vyjádřete $\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta$ pomocí x (ukažte bez pomoci obrázku).

Řešení:



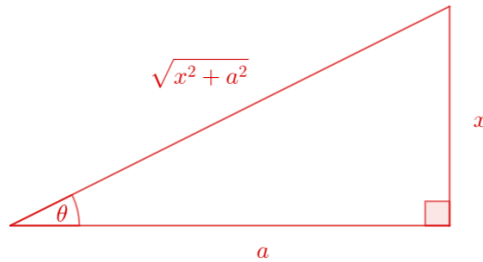
Protože pro $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\tan \theta > 0$, tak platí $|\tan \theta| = \tan \theta$.

Máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{x}{a} \\ \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \\ \tan \theta &= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \end{aligned}$$

- (d) Uvažujme $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $a > 0$ a položme $x = a \tan \theta$. Načrtněte obrázek a vyjádřete $\sin \theta$ pomocí x (ukažte bez pomoci obrázku).

Řešení:



Máme

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}}$$

Odtud

$$\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

Protože pro $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ má $\sin \theta$ a $\tan \theta$ stejné znaménko, po odmocnění vyjde

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$