



10. cvičení - AC a BV funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 BV

Definice 1. Necht $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Variaci funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|; \{x_i\}_{i=0}^n \text{ je dělení } [a, b] \right\}.$$

Řekneme, že funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ konečnou variaci, jestliže $V_a^b(f) < \infty$.

Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ značíme $BV([a, b])$.

(Značení: $V_a^b(f)$ odpovídá $V(f; a, b)$ z přednášky.)

Věta 2. Necht $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in (a, b)$. Pak $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když $f \in BV([a, c])$ a $f \in BV([c, b])$. Navíc

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Úloha 3. Spočítejte variace následujících funkcí (stačí odečíst z obrázku a říct, jak to vypadá pro monotónní funkce). Grafy nemusíte kreslit, už jsou připravené tady: <https://www.geogebra.org/calculator/ccpnefwv>

1. $\heartsuit x^2$ na $[0, 1]$,

3. $\sin x$ na $[0, 10\pi]$,

2. x^2 na $[-1, 1]$,

4. $\frac{1}{2} \lfloor x \sin \frac{\pi x}{2} \rfloor$ na $[-4, 4]$

Úloha 4 ($\otimes$). Ukažte, že Dirichletova funkce

$$f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

Úloha 5 ($\otimes$). Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nemá konečnou variaci na $[0, 1]$.

<https://www.geogebra.org/calculator/wsv9c6hc>

Věta 6. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a f' existuje a je omezená na (a, b) . Pak $f \in BV([a, b])$.

(Důkaz např. tady, Thm. 3.9.: <https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/grady.pdf>.)

Úloha 7 (*). Ukažte, že funkce

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

má konečnou variaci na $[0, 1]$.

<https://www.geogebra.org/calculator/gpm9cqbk>

Úloha 8. Dokažte nebo najděte protipříklad

1. $\heartsuit f \in BV[a, b] \Rightarrow |f| \in BV[a, b]$?

2. $\spadesuit |f| \in BV[a, b] \Rightarrow f \in BV[a, b]$?

Úloha 9. Dokažte nebo najděte protipříklad. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. jestliže f je omezená, pak je BV,

2. $\clubsuit$ jestliže f je BV, pak je omezená.

Věta 10. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pak $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $f = g - h$.

Úloha 11. Ukažte, že jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f, g \in BV([a, b])$, pak i $f + g \in BV([a, b])$ a $\alpha f \in BV([a, b])$

Úloha 12. Nakreslete Vennův diagram pro funkce spojitě, omezeně a BV na $[a, b]$.

2 AC

Definice 13. Řekneme, že funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou konečnou posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b$ máme

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $AC([a, b])$.

Úloha 14 (*). Ukažte z definice, že funkce $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ a $h(x) = \sqrt{x}$ jsou absolutně spojitě na $[0, 1]$.

Úloha 15 (♥). UkaŹte, Źe Cantorova funkce (která je spojitá i stejnoměrně spojitá) je na intervalu $[0, 1]$ BV, ale není absolutně spojitá.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova_funkce

Úloha 16. Najděte funkci, která není absolutně spojitá, ale má konečnou variaci.

Úloha 17. Rozhodněte, zda má AC funkce nutně omezenou derivaci.

Úloha 18 (✱). DokaŹte nebo najděte protipříklad

- $f \in AC[a, b] \Rightarrow |f| \in AC[a, b]$?
- $|f| \in AC[a, b] \Rightarrow f \in AC[a, b]$?

Úloha 19 (✱). Nechť $f, g \in AC([a, b])$. UkaŹte, Źe pak i $fg \in AC([a, b])$.

(3.1) Źe se spojitá variace monotonní funkce?

(4) volte dělení na střídačku z $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(5) volte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2n}$

(7) Věta 6

(8.1) z definice a $||a| - |b|| \leq |a - b|$

(8.2) zkuste upravit Dirichletovu funkci

(9) $|f(x)| + |f(a)| \leq |f(x) - f(a)|$

(14.2) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ Pro ε najděte bod $c = \varepsilon^2/4$. Dělení rozdělte na intervaly před bodem c a po něm. Při odhadu 2. části rozšířte $\sqrt{b_j} + \sqrt{a_j}$.

(15) Źe vzniká Cantorova množina? Ujmme ji pokrýt dělením?

Ve kterých bodech roste Cantorova funkce? (18.1) z definice a $||a| - |b|| \leq |a - b|$

(18.2) zkuste upravit Dirichletovu funkci

(19) $ab - cd = ab - cd = ad + ad - cd$