9. cvičení - Mocninné řady – součet řady 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Abel)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R>0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0+R]$ a

$$\lim_{x\to(x_0+R)-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

(Věta platí i pro variantu $[x_0-R, x_0]$.)

Věta 2 (Mertens)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$$

Algoritmus

1. Přepíšeme řadu na tvar $\sum a_n x^n$ s tím, že nás zajímá konkrétní x. Může být výhodné užít např. x^{2n+1} místo x^n. (Pokud tam není žádné hezké číslo na n-tou, může to být 1^n).
2. Chováme se k příkladu jako minule: poloměr konvergence, součet pomocí derivace nebo integrace...
3. Do výsledného součtu dosadíme naše konkrétní x - pokud je na kraji poloměru konvergence, použijeme Abelovu větu.
4. Pokud to není v zadání, tak nemusíme vyšetřovat chování na celém poloměru konvergence a v obou krajních bodech - jde nám jen o jedno konkrétní x.

Algoritmus 2

1. Lze převést na geometrickou řadu? Nebo na jiného Taylora?
2. Když funkci zderivujeme/zintegrujeme, nelze ji převést na Taylora?
3. Po rozvinutí najdeme poloměr konvergence.
4. Příp. zintegrujeme/zderivujeme zpátky. U integrálů nezapomeneme na konstanty.
5. Zkontrolujeme krajní body - jestliže tam řada konverguje a funkce je definovaná, aplikujeme Abelovu větu.

Příklady

1. Sečtěte následující řady:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+2n)\frac{1}{3^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2n+1)\frac{1}{5^{2n}}$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (h)♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$ (i)❀ $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

2. Sečtěte následující řady (bonus k minulému cviku):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$ (c)❄ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ (d)★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$

3. Rozviňte do mocninné řady (o středu 0) funkce:

(a) $\dfrac{1}{1+x^3}$ (c) $\arctan x$ (e) $\dfrac{1}{3-2x}$ (g) ❄ $\sin^2 x$

(b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (d) $(1+x)\cdot\ln(1+x)$ (f) ♡ $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (h) ❄ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

Bonus

4. ♡ Máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf
Řekneme, že funkce je *vyjádřitelná na okolí 0 jako mocninná řada (MR)*, pokud existuje $\delta > 0$ a posloupnost $\{a_n\}$ splňující, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\delta, \delta)$. Uvažujte f definovanou na okolí 0. Určete, jaké implikace mezi následujícími tvrzeními platí.
   (a) f je MR;
   (b) f je MR a existuje $k \in \mathbb{N}_0$: $f^{(k)}(0) \neq 0$;
   (c) existuje $k \in \mathbb{N}_0$ a funkce g, která je MR, $g(0) \neq 0$ tak, že na nějakém okolí 0 platí $f(x) = x^k g(x)$;
   (d) $f \in C^{\infty}(-\delta, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$.

(1h) $4n^2 - 1 = (2n+1)(2n-1)$
(1i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{3n+1}}{3n+1}$, pak parc. zlomky
(2c) vytkněte $1/x$ a roztrhněte interval konvergence
(2d) analogicky 2c
(3f) $F(x) = 1/(1-x)$
(3g) $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$
(3h) rozvniňte $1/(1+x^2)$, pak Cauchy. součin
(4) $d \not\Rightarrow a$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pro $x > 0$, jinak $f(x) = 0$.