



9. cvičení - Mocninné řady – součet řady 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Abel). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0 + R]$ a

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 + R)^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

(Věta platí i pro variantu $[x_0 - R, x_0]$.)

Věta 2 (Mertens). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)$$

Algoritmus

1. Přepíšeme řadu na tvar $\sum a_n x^n$ s tím, že nás zajímá konkrétní x . Může být výhodné užít např. x^{2n+1} místo x^n . (Pokud tam není žádné hezké číslo na n -tou, může to být 1^n).
2. Chováme se k příkladu jako minule: poloměr konvergence, součet pomocí derivace nebo integrace...
3. Do výsledného součtu dosadíme naše konkrétní x - pokud je na kraji poloměru konvergence, použijeme Abelovu větu.
4. Pokud to není v zadání, tak nemusíme vyšetřovat chování na celém poloměru konvergence a v obou krajních bodech - jde nám jen o jedno konkrétní x .

Algoritmus 2

1. Lze převést na geometrickou řadu? Nebo na jiného Taylora?
2. Když funkci zderivujeme/zintegrujeme, nelze ji převést na Taylora?
3. Po rozvinutí najdeme poloměr konvergence.
4. Příp. zintegrujeme/zderivujeme zpátky. U integrálů nezapomeneme na konstanty.
5. Zkontrolujeme krajní body - jestliže tam řada konverguje a funkce je definovaná, aplikujeme Abelovu větu.

Příklady

1. Sečtěte následující řady:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{1}{5^{2n}}$$

$$(c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$$

$$(e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$(i) 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

2. Sečtěte následující řady (bonus k minulému cviku):

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$$

3. Rozviňte do mocninné řady (o středu 0) funkce:

$$(a) \frac{1}{1+x^3}$$

$$(c) \arctan x$$

$$(e) \frac{1}{3-2x}$$

$$(g) \sin^2 x$$

$$(b) \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$(d) (1+x) \ln(1+x)$$

$$(f) \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(h) \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

Bonus

4. Příklad máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf
Řekneme, že funkce je *vyjádřitelná na okolí 0 jako mocninná řada (MR)*, pokud existuje $\delta > 0$ a posloupnost $\{a_n\}$ splňující, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\delta, \delta)$.
Uvažujte f definovanou na okolí 0. Určete, jaké implikace mezi následujícími tvrzeními platí.

(a) f je MR;

(b) f je MR a existuje $k \in \mathbb{N}_0$: $f^{(k)}(0) \neq 0$;

(c) existuje $k \in \mathbb{N}_0$ a funkce g , která je MR, $g(0) \neq 0$ tak, že na nějakém okolí 0 platí $f(x) = x^k g(x)$;

(d) $f \in C^\infty(-\delta, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$.

(1b) $4n^2 - 1 = (2n+1)(2n-1)$	(3f) $f(x) = 1/(1-x)$	(3g) $\sin^2 x = x^2 \cos^2 x/2$	(3h) rozviňte $1/(1+x^2)$, pak Cauchy. součin	(4) $d \neq a$, $f(x) = e^{-\frac{x}{1+x^2}}$ pro $x > 0$ a $x < 0$, jinak $f(x) = 0$.
--------------------------------	-----------------------	----------------------------------	--	---