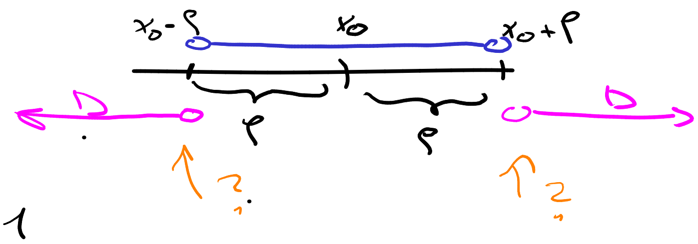
Mocninné řady

x_0 – střed m. ř.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n (x-x_0)^n}_{f_n(x)}$$

ρ $\qquad \sum$ AK $\quad |x-x_0| < \rho$

$\qquad \sum$ D $\quad |x-x_0| > \rho$



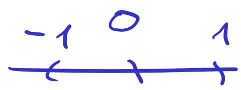
$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

- $a_n = \frac{1}{n} \qquad x_0 = 0$
- $\frac{1}{\rho} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\rho = 1$

- Víme:



$x \in (-1,1)$ AK $\qquad x \in (-\infty,-1)$ D

$\qquad (1,\infty)$ D

- $x = 1 \qquad x = -1 \qquad ?$

$\sum \frac{1}{n} 1^n$ D $\qquad \sum \frac{1}{n}(-1)^n$ NAK

Závěr: $x \in (-1,1)$ AK $\qquad x = -1$ NAK

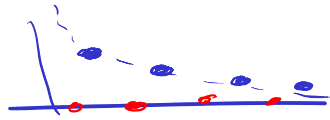
$x \in (-\infty,-1)$ D

$x \in [1,\infty)$ D

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} x^n$$

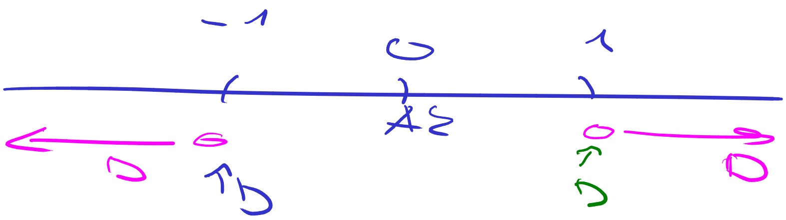
n sudé $\quad \frac{1+1}{n} = \frac{2}{n}$

n liché $\quad \frac{0}{n}$



$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1+(-1)^n}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{\lim \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}} = \underline{\underline{1}}$$



$x = 1$

$$\sum \frac{1+(-1)^n}{n} \quad D$$

$$\underbrace{\underset{D}{\sum \frac{1}{n}} + \underset{K}{\sum \frac{(-1)^n}{n}}}_{D}$$

← Leibniz

$x = -1$

$$\sum \frac{1+(-1)^n}{n} (-1)^n$$

$$\underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}}_{D}$$

Závěr: AK $\quad x \in (-1, 1)$

D $\quad x \in (-\infty, -1], \; [1, \infty)$

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ \frac{1}{n^3} & \text{pro } n \geq 1. \end{cases}$$

Platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1,$$

a tudíž ze vzorce (8.2) dostaneme $\varrho = 1$.

Poloměr konvergence ϱ lze také vypočítat pomocí Poznámky 3.2.16, neboť platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1.$$

♣

8.5.2. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu ve tvaru (8.1) se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \frac{n!}{(2n)!} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(2n)!}}{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \infty.$$

Podle Poznámky 3.2.16 je tedy poloměr konvergence roven $\varrho = \infty$. ♣

8.5.3. Příklad. Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k!}}{k!}$.

Řešení. Jedná se o mocninnou řadu se středem $x_0 = 0$ a koeficienty

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{pokud } n = k! \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, a tedy podle Věty 2.4.15 a Příkladu 2.2.47 máme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{a_{k!}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k!]{\frac{1}{k!}} = 1,$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$. Odtud a ze vzorce (8.2) vyplývá, že poloměr konvergence je roven 1. ♣