6. cvičení - Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Nechť $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?
   (a) Funkce f je spojitá a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.
   (b) Funkce f je spojitá skoro všude a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.
   (c) Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(f(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$.

   Řešení:
   - (a$\to$b) Zřejmě.
   - (b$\not\to$a) Protipříklad: $f(x) = x$ na $[0,1)$, $f(1) = \frac{1}{2}$.
   - (b$\not\to$c) Protipříklad: $f(x) = x$ na $[0,1)$, $f(1) = 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ na $[0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) = 0$. Řada ale nekonverguje stejnoměrně, protože nesplňuje nutnou podmínku. Totiž $x^n \not\rightrightarrows 0$ na $(0,1)$.
   - (c$\not\to$a) Protipříklad: $f(x) = 0$ na $[0,1/2)$, $f(x) = \frac{1}{2}$ na $[1/2,1]$. Pak $\sup|f^n(x)| = \frac{1}{2^n}$, což je konvergentní řada, tedy z Weierstrassova kritéria řada konverguje. Ale f není spojitá.
   - (c$\not\to$b) Protipříklad: $f(x) = 0$ na $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ na $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Pak $\sup|f^n(x)| = \frac{1}{2^n}$, což je konvergentní řada, tedy z Weierstrassova kritéria řada konverguje. Ale f není spojitá v žádném bodě $[0,1]$.
   - (a$\to$c) Protože f je spojitá, je spojitá i $|f|$. Spojitá $|f|$ nabývá maxima, tedy $\exists x_0$: $|f(x)| \le |f(x_0)| < 1$. Tedy $\sigma_n = |f^n(x)| = |f^n(x_0)|$. Ale $\sum_{n=1}^{\infty} |f^n(x_0)|$ konverguje. Tedy (c) platí.

2. Pravda nebo nepravda?
   (a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[a,b]$ a $(b,c]$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,c]$.
   Řešení: Pravda. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_1$ tak, že $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \ge n_1$ je
   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
   Stejně tak $\exists n_2$ tak, že $\forall x \in (b,c]$ $\forall n \ge n_2$
   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
   Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ a položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $\forall x \in [a,c]$ je
   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
   (b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \dots, A_M$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{M} A_i$.
   Řešení: Pravda, analogicky (a).
   (c) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \dots$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
   Řešení: Nepravda. Protipříklad: $f_n = x^n$, $A_i = [0, 1 - 1/i]$.
   (d) Nechť K je kompakt. Pak $f_n \rightrightarrows$ na K právě tehdy, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na K.

Řešení: Zjevně platí "$\Rightarrow$".

Pro "$\Leftarrow$" předpokládejme, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$. Tedy pro každé $x \in K$ existuje otevřené okolí B_x tak, že $f_n \rightrightarrows$ na $K \cap B_x$. Systém B_x tvoří otevřené pokrytí K, tedy lze vybrat konečné podpokrytí. Tvrzení pak plyne z (b).

3. (https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf)
Nechť $f, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$
Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:
   (a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když existuje množina $E \subset [0,1]$, E je míry 0 a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.
   Řešení: "$\Rightarrow$" zjevně platí.
   "$\Leftarrow$" neplatí. Protipříklad: uvažujme posloupnost funkcí $f_n = D(x)$ na $[0,1]$ (Dirichletova funkce). Pak $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, ale $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$.
   (b) Nechť f_n, f jsou spojité. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \,\mathrm{d}t \to 0$.
   Řešení: "$\Rightarrow$" máme větu (nebo Lebesgueovu větu z míry). Lze i přímo. Z definice máme
$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall x \in [0,1], \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
   Pak
$$\left| \int_0^1 f_n - f \right| \leq \int_0^1 |f_n - f| < \varepsilon \cdot 1$$
   Odtud $\int_0^1 f_n - f = 0$. Tedy $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$. (Pozn.: funkce f_n, f jsou spojité, interval $[0,1]$ je omezený.)
   "$\Leftarrow$" neplatí. Protipříklad: uvažujme posloupnost funkcí
$$f_n = \begin{cases} 1 - nx, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$
   Položme $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$. Dále
$$\int_0^1 |f_n - f| = \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$
   Ale $f_n \not\rightrightarrows f$.
   (c) Nechť f_n, f jsou spojité. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když existuje množina $E \subset [0,1]$, E je míry 0 a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.
   Řešení: "$\Rightarrow$" zjevně platí.
   "$\Leftarrow$" platí. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in [0,1] \setminus E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Uvažujme $n \geq n_0$ a $x \in [0,1]$. Pak ze spojitosti f_n a f $\exists \bar{x_n} \in [0,1] \setminus E :$
$$|f_n(\bar{x_n}) - f_n(x)| < \varepsilon$$
   a
$$|f(\bar{x_n}) - f(x)| < \varepsilon.$$
   Celkem
$$|f_n(x) - f(x)| < |f_n(x) - f_n(\bar{x_n})| + |f_n(\bar{x_n}) - f(\bar{x_n})| + |f(\bar{x_n}) - f(x)| < 3\varepsilon.$$

Kompaktní metrické prostory

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Úloha 2. Pomocí definice ukažte, že interval $(0, 1]$ není kompakt.
Řešení: Uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ale 0 nepatří do zadaného intervalu. Navíc pro každou podposloupnost bude platit totéž. Což je spor s definicí.

Definice 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $A, B \subset X$ jsou neprázdné množiny. *Vzdáleností množin A a B* rozumíme

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

Úloha 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$ je neprázdná kompaktní množina, $B \subset X$ je neprázdná uzavřená množina. Dokažte, že je-li $A \cap B = \emptyset$, pak je $\rho(A, B) > 0$.
Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf
Pro spor předpokládejme, že

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y), x \in A, y \in B\} = 0.$$

Tedy existuje posloupnost uspořádaných dvojic (x_n, y_n) taková, že $x_n \in A$, $y_n \in B$ a $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.
Zároveň lze říci, že a $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, B) = 0$.
Protože A je kompakt, lze z posloupnosti x_n vybrat konvergentní podposloupnost $x_{n_k} \to x$, kde $x \in K$.
Navíc platí, že $\rho(x, B) = 0$ (lze ukázat sporem). Pak ale $x \in \bar{B}$. Protože B je uzavřená, tak $\bar{B} = B$, tedy $x \in B$.
Tedy $x \in A \cap B$, což je spor.

Úloha 5. Najděte metrický prostor (X, ρ) a množiny $F, K \subset X$ takové, že F je uzavřená, K je kompaktní a zároveň neexistuje dvojice bodů $x \in K$ a $y \in F$ taková, že $\rho(F, K) = \rho(x, y)$. (Vzdálenosti F a K se „nenabývá“.)
Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf
Položme $X = \mathbb{Q}$ s ρ_2. Uvažujme množinu $F = \{(1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}\}$. Platí, že posloupnost $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a $\lim_{n\to\infty} x_n = e$. Množina F je uzavřená (nelze z ní vykonvergovat, protože jsme v prostoru $\mathbb{Q}$).
Dále položme $K = \{3\}$. Jednoprvková množina je zjevně kompaktní.
Pak

$$\rho(F, K) = \inf\{|3 - x|, x \in F\} = 3 - e.$$

Tedy infimum by se nabylo v bodě $e \notin F$, tedy jsme hotovi.

Definice 6. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. *Průměrem* množiny A rozumíme číslo

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sup\{\rho(x, y); x, y \in A\}, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Úloha 7. Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor. Dokažte, že existují body $x, y \in X$ takové, že $\rho(x, y) = \operatorname{diam}(X)$.

Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf
Označme $d = \operatorname{diam}(X)$.
Z definice suprema existují posloupnosti x_n, y_n v X takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = d.$$

Protože X je kompakt, lze najít konvergentní podposloupnosti $x_{n_k} \to x$ a $y_{n_k} \to y$. Navíc platí

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) = d.$$

Pak ale $\rho(x, y) = d$:
Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon, \qquad \rho(y_{n_k}, y) < \varepsilon, \qquad \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < d + \varepsilon.$$

Pak

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y) < \varepsilon + d + \varepsilon + \varepsilon.$$

Definice 8. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Věta 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $K \subset X$ je kompaktní. Potom K je omezená a uzavřená.

Poznámka 10. Označme l^∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 11. Uvažujte prostor l^∞. Ukažte, že c_0 není kompaktní podprostor l^∞.
Řešení: Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=755271223
Uvažujme posloupnosti x^k tvaru

$$x_n^k = \begin{cases} n, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Pak $\lim_{n\to\infty} x_n^k = 0$, tedy $\{x_n^k\} \in c_0$.
Zároveň pro konstantně nulovou posloupnost y máme

$$\rho(x^k, y) = k.$$

Tedy množina c_0 není v l^∞ omezená, tedy nemůže být kompaktní.

Poznámka 12. Kompaktní metrický prostor lze ekvivalentně definovat i takto:
Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
Neboli: Nechť $\{A_i, i \in I\}$ je systém otevřených množin v X takový, že $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.
(systém může být spočetný, nespočetný...)
Pak existuje konečný systém $J \subset I$ tak, že $X \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$.

Úloha 13. (a) Ukažte, že průnik libovolného počtu kompaktních množin je kompaktní.

Řešení: Uvažujme $K = \bigcap_{i \in I} K_i$, kde K_i jsou kompaktní a I je systém indexů. Platí, že každá kompaktní množina K_i je uzavřená. Dále platí, že průnik uzavřených množin je uzavřená množina, tedy K je uzavřená.
Zároveň $K \subset K_i$ pro všechna $i \in I$. Víme, že uzavřená podmnožina kompaktu je také kompakt. Tedy jsme hotovi.

(b) Ukažte, že sjednocení konečného počtu kompaktních množin je kompaktní. Ukažte, že pro nekonečné sjednocení to nemusí platit.

Řešení: Uvažujme $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$, kde K_i jsou kompaktní.
Dále nechť $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí K. Pak ale $\mathcal{G}$ je i otevřené pokrytí pro každé K_i. Tedy lze vybrat konečné podpokrytí $\mathcal{G}_i$.
Položme $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n$. Pak $\bar{\mathcal{G}}$ je konečné podpokrytí pro množinu K, tedy K je kompakt.
Nekonečné sjednocení: uvažujme $K_i = [-i, i]$ v prostoru $\mathbb{R}$. Pak K_i je kompaktní (z každé omezené posloupnosti totiž lze vybrat konvergentní podposloupnost), ale

$$\bigcup K_i = \mathbb{R},$$

což je neomezená množina, tedy není kompaktní.

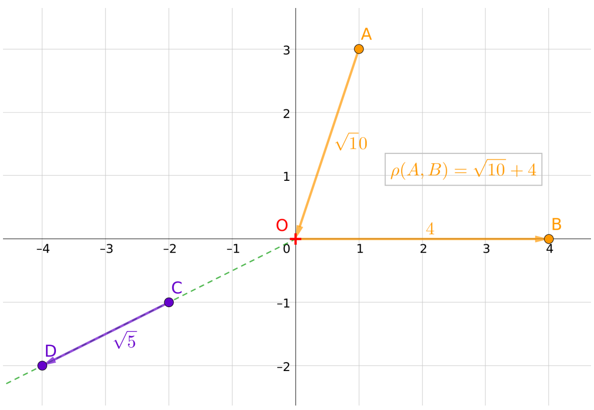
Věta 14 (Nutná podmínka kompaktnosti)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Nechť existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků X a $\delta > 0$ taková, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq m : \rho(x_m, x_n) \geq \delta.$$

Pak X není kompaktní.

Úloha 15. Pampeliškový prostor definujeme následovně.
Položme $X = \mathbb{R}^2$, pro prvky $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ pak máme metriku

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A,\ B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Rozhodněte, zda v pampeliškovém metrickém prostoru platí, že každá omezená a uzavřená množina už je kompaktní.

Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/143424/fi_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx
Uvažujme kružnici $x^2 + y^2 = 1$ (obyčejná kružnice z prostoru $\mathbb{R}^2$).
Pak pro každé dva body $a \neq b$ máme $\rho(a,b) = 1 + 1 = 2$.
Tedy máme (dokonce) nespočetně bodů z Věty 14 a prostor není kompaktní.

Úloha 16. Uvažujte jednotkovou kouli v prostoru l^∞. Ukažte, že přestože jde o omezenou množinu, tak není kompaktní.
Řešení: Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=755271223
Jednotková koule je omezená množina (každá koule je z definice omezená množina).
Ukážeme, že není kompaktní. Uvažujme posloupnosti e_n, $n \in \mathbb{N}$, tedy posloupnosti, které mají právě na jednom místě 1, jinak obsahují samé 0. Pak pro $n \neq m$ máme

$$\rho(e_n, e_m) = 1.$$

Tedy z Věty 14 jednotková koule nemůže být kompaktní.

Věta 17 (Kompaktnost v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$. Pak K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Poznámka 18. (Podle https://www.physics.muni.cz/~tomtyc/teorfyzzaj/fraktaly_chaos-MSarbort.pdf.)
Cantorovým diskontinuem rozumíme množinu vzniklou následujícím postupem:

(a) Označme $C_0 = [0,1]$.
(b) Z této množiny „vyndáme prostřední třetinu“ - interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Zbylou množinu označme C_1, tedy $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
(c) Z intervalů množiny C_1 opět vyjmeme prostřední třetiny. Získáme množinu $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
(d) Postup iterujeme, vyndaváme další třetiny a definujeme množiny C_n.
(e) Cantorovo diskontinuum je pak definováno jako $CD = \bigcap_n C_n$.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

Úloha 19. Ukažte, že Cantorovo diskontinuum je kompaktní množina.
Řešení: Protože jsme na $\mathbb{R}$, tak stačí ukázat, že CD je omezená a uzavřená množina.
Máme $CD \subset [0,1]$, tedy je omezená.
Dále $CD = \bigcap_n C_n$, tedy je průnikem uzavřených množin, tedy je uzavřená.
Tedy Cantorovo diskontinuum je kompakt.