6. cvičení - Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Nechť $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?
   (a) Funkce f je spojitá a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.
   (b) Funkce f je spojitá skoro všude a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.
   (c) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$.
2. Pravda nebo nepravda?
   (a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[a,b]$ a $(b,c]$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,c]$.
   (b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \dots, A_M$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{M} A_i$.
   (c) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \dots$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
   (d) ♡ Nechť K je kompakt. Pak $f_n \rightrightarrows$ na K právě tehdy, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na K.
3. (https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf)
   Nechť $f, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$
   Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:
   (a) $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když existuje množina $E \subset [0,1]$, E je míry 0 a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.
   (b) Nechť f_n, f jsou spojité. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$.
   (c) Nechť f_n, f jsou spojité. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ právě tehdy, když existuje množina $E \subset [0,1]$, E je míry 0 a $f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1] \setminus E$.

Kompaktní metrické prostory

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X,ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Úloha 2. Pomocí definice ukažte, že interval $(0,1]$ není kompakt.

Definice 3. Nechť (X,ρ) je metrický prostor, nechť $A, B \subset X$ jsou neprázdné množiny. *Vzdáleností množin A a B* rozumíme

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y), x \in A, y \in B\}.$$

Úloha 4. Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $A \subset X$ je neprázdná kompaktní množina, $B \subset X$ je neprázdná uzavřená množina. Dokažte, že je-li $A \cap B = \emptyset$, pak je $\rho(A,B) > 0$.

Úloha 5. Najděte metrický prostor (X,ρ) a množiny $F, K \subset X$ takové, že F je uzavřená, K je kompaktní a zároveň neexistuje dvojice bodů $x \in K$ a $y \in F$ taková, že $\rho(F,K) = \rho(x,y)$. (Vzdálenosti F a K se „nenabývá“.)

Definice 6. Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. *Průměrem* množiny A rozumíme číslo

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sup\{\rho(x,y); x, y \in A\}, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Úloha 7. Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor. Dokažte, že existují body $x, y \in X$ takové, že $\rho(x, y) = \operatorname{diam}(X)$.

Definice 8. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Věta 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $K \subset X$ je kompaktní. Potom K je omezená a uzavřená.

Poznámka 10. Označme l^∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 11. Uvažujte prostor l^∞. Ukažte, že c_0 není kompaktní podprostor l^∞.

Poznámka 12. Kompaktní metrický prostor lze ekvivalentně definovat i takto:
Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
Neboli: Nechť $\{A_i, i \in I\}$ je systém otevřených množin v X takový, že $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.
(systém může být spočetný, nespočetný. . .)
Pak existuje konečný systém $J \subset I$ tak, že $X \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$.

Úloha 13. (a) Ukažte, že průnik libovolného počtu kompaktních množin je kompaktní.

(b) Ukažte, že sjednocení konečného počtu kompaktních množin je kompaktní. Ukažte, že pro nekonečné sjednocení to nemusí platit.

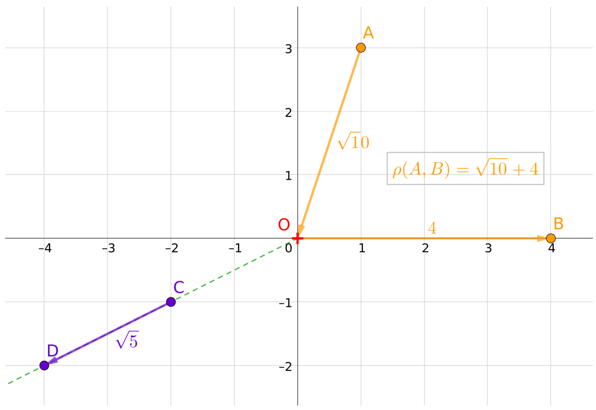
Věta 14 (Nutná podmínka kompaktnosti)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Nechť existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků X a $\delta > 0$ taková, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq m : \rho(x_m, x_n) \geq \delta.$$

Pak X není kompaktní.

Úloha 15. Pampeliškový prostor definujeme následovně.
Položme $X = \mathbb{R}^2$, pro prvky $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ pak máme metriku

$$\rho(A,B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}, & A,\ B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Rozhodněte, zda v pampeliškovém metrickém prostoru platí, že každá omezená a uzavřená množina už je kompaktní.

Úloha 16. Uvažujte jednotkovou kouli v prostoru l^∞. Ukažte, že přestože jde o omezenou množinu, tak není kompaktní.

Věta 17 (Kompaktnost v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$. Pak K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

Poznámka 18. (Podle https://www.physics.muni.cz/~tomtyc/teorfyzzaj/fraktaly_chaos-MSarbort.pdf.)
Cantorovým diskontinuem rozumíme množinu vzniklou následujícím postupem:

(a) Označme $C_0 = [0,1]$.
(b) Z této množiny „vyndáme prostřední třetinu“ - interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Zbylou množinu označme C_1, tedy $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
(c) Z intervalů množiny C_1 opět vyjmeme prostřední třetiny. Získáme množinu $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
(d) Postup iterujeme, vyndaváme další třetiny a definujeme množiny C_n.
(e) Cantorovo diskontinuum je pak definováno jako $CD = \bigcap\limits_n C_n$.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

Úloha 19. Ukažte, že Cantorovo diskontinuum je kompaktní množina.

(Zd) Kpt = z $\forall$ otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.