5. cvičení - Opakování

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Zkouškové příklady

1. Mějme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + n^4 x^2}$$

   (a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje?
   (b) Je F spojitá na $(0, \infty)$?

2. Ukažte, že funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)$$

   je spojitá v bodě 1. (Hint: Záměna sumy a derivace.)

3. Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{(nx+2)^2}{n^2x^2 + 4}$$

   (a) Nalezněte funkci f takovou, že f_n konverguje bodově k funkci f na $\mathbb{R}$.
   (b) Vyšetřete, zda posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na $[0, 2]$ k funkci f.
   (c) Vyšetřete, zda posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na $[2, \infty)$ k funkci f.

4. Mějme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n \sin x}}{n^2}$$

   (a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje?
   (b) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je F spojitá.

5. Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \frac{|x + \frac{1}{n^2}| - |x - \frac{1}{n^2}|}{|x + \frac{1}{n^2}| + |x - \frac{1}{n^2}|}, \qquad x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{N}$$

   (a) Rozhodněte, zda řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$. (Hint: Rozepište absolutní hodnoty pro intervaly $(-\infty, -\frac{1}{n^2})$, $[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}]$ a $(\frac{1}{n^2}, \infty)$.)
   (b) Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá v bodě 3.
   (c) Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je klesající na inntervalu $(2, \infty)$.

6. Uvažujte funkce

$$f_n(x) = \frac{|\sin x|}{n^2(1 + nx^2)}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

   (a) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje bodově na $(-\pi, \pi)$.
   (b) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $(-\pi, \pi)$.

(c) Je-li $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$, $x \in (-\pi, \pi)$, spočtěte derivaci $g'(x)$ funkce g bodech intervalu $(-\pi, \pi)$.

(d) Je-li $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, spočtěte jednostranné derivace f v bodě 0.

7. Mějme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$$

(a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje?

(b) Najděte maximální intervaly, na kterých je F spojitá.

(c) Je F diferencovatelná na $(0, \infty)$?

(d) Je F diferencovatelná na $\mathbb{R}$?

8. Uvažujte funkce

$$f_n(x) = e^{\sqrt[n]{\min\{x,1\}}} \cdot \log(1 + \sqrt[n]{\max\{1, x\}}), \qquad x \in (0, \infty)$$

(a) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje bodově na $(0, \infty)$.

(b) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje stejnoměrně na $(0, \infty)$.

(c) Zjistěte, zda posloupnost $(f_n(x))$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$.

9. Uvažujte funkce

$$f_n(x) = \frac{e^{x^2/n} - 1}{n + x^2}$$

(a) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

(b) Zjistěte, zda řada $\sum f_n(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

(c) Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \sum f_n(x)$ všude, kde existuje.

Bonus

10. Nechť $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

(a) $f_n \to 0$ na $[0, 1]$ a f_n jsou spojité na $[0, 1]$ $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1]$.

(b) $f_n \to 0$ na $[0, 1]$ a f_n jsou rostoucí a $[0, 1]$ $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1]$.

11. Dejte dohromady seznam všech kritérií a postupů, které můžete při stejnoměrné konvergenci potkat. Čím začít, co potom, co z čeho plyne (a co neplyne).

12. Jaké situace můžeme potkat při stejnoměrné konvergenci posloupností? A jak spolu souvisí? Např.:

- $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0, 1]$, problém je u 0.
- Může pak $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0, 1]$?
- $f_n \not\rightrightarrows f$ na $(0, 1]$, problém je u 0.
- Může pak $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $[0, 1]$?