(1a) $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ $\quad x \in (-1, \infty)$

(b)

$a_n(x) = (-1)^n$

$b_n(x) = \frac{1}{n+x}$

$b_n \overset{?}{\geq} b_{n+1}$ $\qquad b_n = \frac{1}{n+x} \geq 0$ ✓

$\frac{1}{n+x} \geq \frac{1}{n+x+1}$

$n+x+1 \geq n+x$

$1 \geq 0$ ✓

$a_n = (-1)^n$ má om. č. součty

$(-1, 0, -1, 0 \dots)$

nez. na x.

• $b_n \rightrightarrows 0$? $\quad$ fix x: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x} = 0$

fix n: $r_n = \sup_{x \in (-1,\infty)} \left\{ \left| \frac{1}{n+x} - 0 \right| \right\}$

$= \frac{1}{n-1}$ (pro $n \geq 2$ dobře def.)

$\lim r_n = \lim \frac{1}{n-1} = 0$ ✓

závěr: $\sum \rightrightarrows$ k $\quad$ z (b) kritéria

(1b)

$\sum (-1)^n (1-x) x^n$ na $[0,1]$

(D) $a_n = (-1)^n$ → stejně om. č. součty

$b_n = (1-x)x^n$ $\quad b_n \geq 0$ ✓

$b_{n+1} \overset{?}{\leq} b_n$

$(1-x)x^{n+1} \leq (1-x)x^n$

$x \leq 1$ ✓

$b_n \rightrightarrows 0$? $\quad$ fix x: $\lim\limits_{n\to\infty} (1-x)x^n = \begin{cases} (1-x)\cdot 0 & x\in[0,1) \\ 0\cdot 1 & x=1 \end{cases}$

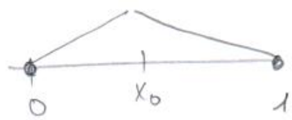
$= 0$

fix n: $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |(1-x)x^n|$

$f_n'(x) = -x^n + (1-x)nx^{n-1} = x^{n-1}(-x + (1-x)n)$

$-x + n - xn \qquad x_0 = \frac{n}{1+n}$

$f(x_0) = \left(1 - \frac{n}{1+n}\right)\frac{n^n}{(1+n)^n} = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{1+n}\right)^n$



$\lim \rho_n = \lim \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n} = 0\cdot\frac{1}{e} = 0$ ✓

Závěr: $\sum \rightrightarrows$ z (D)

(1e)

$$\sum \frac{\cos nx}{n^s} \qquad s \in \mathbb{R}$$

- $s > 1$; $\quad \sigma_n = \sup \left| \frac{\cos nx}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^s} \qquad \sum \frac{1}{n^s}$ k $\quad s > 1$

- $s \leq 0 \quad$ NP: $\quad \frac{\cos nx}{n^s} \overset{?}{\underset{\to}{\rightrightarrows}} 0$

  Ne, $\quad \frac{\cos nx}{n^s} \not\rightrightarrows 0$

- $s \in (0,1]$

(D) $\quad b_n = \frac{1}{n^s} \qquad a_n = \cos(nx)$

$b_n \rightrightarrows 0 \quad b_{n+1} \leq b_n \qquad a_n$ má om. č. součty na $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$

(nez. na x)

Tedy $\sum \rightrightarrows$ na $[2k\pi+\delta, 2(k+1)\pi - \delta]$ z (D)

tedy $\sum \overset{loc}{\rightrightarrows}$ $\quad (2k\pi, 2(k+1)\pi)$

- Vyvrácení $\sum \rightrightarrows$: BC podmínka

Zvolme n_0 a $\quad m = n_0 \quad n = 2n_0 \quad x = \frac{1}{2n_0}$:

$$\sum_{n=n_0}^{2n_0} f_n\left(\frac{1}{2n_0}\right) = \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\cos\left(\frac{n}{2n_0}\right)}{n^s} \geq \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\cos 1}{(2n_0)^s} \geq n_0 \frac{\cos 1}{(2n_0)^s} = 2^{-s} n_0^{1-s} \cos 1 \geq$$

$$\geq \underbrace{2^{-s}\cos 1}_{\text{číslo}}$$

1c

$$\sum \frac{\cos(nx)}{n} \arctan(nx) \qquad \text{na} \quad [0, 2\pi]$$

A

- $\underbrace{\sum \frac{\cos nx}{n}}_{a_n} \overset{loc}{\rightrightarrows}$ z Dirichleta na $(0, 2\pi)$ (předchozí příklad)

- $b_n = \arctan(nx)$

$|b_n| \leq \pi/2$ $\qquad 0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq \pi/2$

$\arctan nx \leq \arctan(n+1)x$

z $nx \leq (n+1)x$

$\rightarrow \sum \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(0, 2\pi)$ z A

- vyvrácení $\sum \rightrightarrows$ $\qquad$ BC podm

$n_0, \quad m = n_0 \quad n = 2n_0 \quad x = \frac{1}{2n_0}$

$$\sum_{n=n_0}^{2n_0} f_n\left(\frac{1}{2n_0}\right) = \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\cos \frac{1}{2n_0} \cdot n}{n} \arctan\left(n \cdot \frac{1}{2n_0}\right) \geq \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\cos 1}{2n_0} \arctan \frac{1}{2}$$

$$\geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} \cdot \cos 1 \cdot \arctan 1/2 = \frac{1}{2} \cos 1 \arctan \frac{1}{2} =: \varepsilon$$

(1e)

$$\sum \frac{\sin x \ \sin(nx)}{\sqrt{n+x}} \qquad (0, \infty)$$

- (D) $a_n = \sin x \ \sin(nx)$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$$

- $b_n \to 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+x}} = 0$

$$r_n = \sup_{x>0} \left| \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+0}}$$

$$\lim r_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$b_n \rightrightarrows 0$ ✓ $\qquad b_n \geq 0$

$$b_{n+1} \leq b_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1+x}} < \frac{1}{\sqrt{n+x}} \checkmark$$

- a_n:

$$\left| \sum_{i=1}^{N} (\sin x)(\sin nx) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \left(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x \right) \right|$$

$$\frac{1}{2} \Big[1 - \cos 2x + \cos x - \cos 3x + \cos 2x - \cos 4x + \dots + \cos(N-1)x - \cos(N+1)x \Big]$$

$$= \left| \frac{1}{2} \left(1 + \cos x - \cos(Nx) - \cos(N+1)x \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$\Rightarrow$ (D) $\sum \rightrightarrows$ na $(0, \infty)$

(2a) $F(x) = \sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n+x}}_{f_n(x)}$ na $(-1, \infty)$

- $f_n'(x) = (-1)^n \cdot \frac{-1}{(n+x)^2}$ $\to$ f_n mají dif f_n'

- $x_0 = 0$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konv. (Leibniz)

- $\sum -\frac{(-1)^n}{(n+x)^2} \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-1, \infty)$

pravda z Weierstrasse na $[-1+\delta, \infty)$ $\sigma_n = \sup_{x \in [-1+\delta, \infty)} \left| \frac{-(-1)^n}{(n+x)^2} \right| = \sup \frac{1}{(n+x)^2}$

$= \frac{1}{(n-1+\delta)^2}$

$\sum \frac{1}{(n-1+\delta)^2}$ konv.

Závěr: F' existuje

(2b) $G(x) = \sum \underbrace{x \frac{(-1)^n}{n+x}}_{f_n}$

- $G(x) = x \cdot F(x)$ $\to$ součin 2 diferencovatelných

nebo přes větu:

- $f_n' = \frac{n}{(n+x)^2} (-1)^n$

- $x = 0$ $\sum 0$ konv. ✓

- $\sum (-1)^n \cdot \frac{n}{(n+x)^2} \rightrightarrows$ na $[-1+\delta, k]$

Dirichlet: $(-1)^n = a_n$ $b_n = \frac{n}{(n+x)^2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+x)^2} = 0$

- $b_n \rightrightarrows 0$? $\sigma_n = \sup_{x \in (-1, k]} \frac{n}{(n+x)^2} = \frac{n}{(n+\delta-1)^2}$ $\lim \sigma_n = 0$ ✓

- $b_n \geq 0$ ✓ $b_{n+1} \leq b_n$?

fixx, $g_x(y) = \frac{y}{(y+x)^2}$ $\frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{-y+x}{(y+x)^3}$

tedy pro $y > k$ (tedy $n > k$)

je $g_x \searrow$ $\hookrightarrow$ $b_{n+1} \leq b_n$.

Tedy $G'(x)$ existuje

Pokud $x \in (-\infty, -1]$, platí

$$(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n) = \operatorname{arctg}(|x|^n) \geq \operatorname{arctg} 1,$$

a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, \infty)$.

Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci na $[0, \infty)$. Položíme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad g_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n), \quad x \in [0, \infty).$$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, pro každé $x \in [0, \infty)$ je $\{g_n(x)\}$ monotónní a $|g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \infty)$. Dle Věty 12.3.6 daná řada konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Ukážeme nyní, že $\sum \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$ nekonverguje stejnoměrně na žádném pravém okolí bodu -1. Předpokládejme pro spor, že řada konverguje stejnoměrně na nějakém intervalu $(-1, -1+\delta)$. Položme

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}, \quad x \in (-1, -1+\delta).$$

Jelikož

$$\lim_{x \to -1_+} f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi}{4\sqrt{n+1}} = a_N \in \mathbb{R},$$

dle Věty 12.1.7 existuje vlastní limita $\lim_{N\to\infty} a_N$. To je však zřejmá nepravda, a tedy náš předpoklad o stejnoměrné konvergenci byl chybný.

Ukážeme však, že řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[q, 0]$, kde $q \in (-1, 0)$. Pro $x \in [q, 0]$ totiž platí

$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)}{\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{\operatorname{arctg}(|x|^n)}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{\sqrt{n+1}} \leq |q|^n .$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |q|^n$ konvergentní, konverguje daná řada stejnoměrně na $[q, 0]$ dle Věty 12.3.3.

Řada tak konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1, \infty)$, což zaručuje spojitost f na tomto intervalu, vizte Větu 12.1.8. ♣

3 **12.5.16. Příklad.** Spočtěte $f'(0)$, pokud

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. Označíme

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$|f_n'(x)| = \left|(-1)^n \frac{\cos(1+\frac{x}{n})}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Tedy na každém intervalu tvaru $(-q,q)$, kde $q>0$, je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ dle Věty 12.3.3. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sin(1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje, jsou splněny předpoklady Věty ??. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $(-q,q)$ a navíc

O derivaci

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (-q,q).$$

Tedy

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

♣

12.5.17. Příklad. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

a zjistěte, zda je na něm spojitá.

Řešení. Položme

$$f_n(x) = \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(2x))^{2n}}{\sqrt{\log n}} = \left(\operatorname{sign}(\cos x)\right)^n \frac{\left(4\cos^2 x\right)^n}{\sqrt{\log n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokud $x \in \mathbb{R}$ splňuje $|\cos^x| < \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak

$$|f_n(x)| \leq \left(4\cos^2 x\right)^n,$$

a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně. Pokud $|\cos^x| > \frac{1}{2}$, tj. $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak $f_n(x) \not\to 0$, a tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ diverguje. Pokud $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = \frac{1}{2}$ a $\operatorname{sign}\cos x = 1$, tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}}$$

diverguje. Pokud $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sign}\cos x = -1$, a tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje dle Věty 3.3.1. Definiční obor f je tak

$$\mathcal{D}(f) = \left[\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)\right] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) = \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+n^2}\right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)$$
$$\geq N \log\left(1+\frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0,\infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0,\infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0,\infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

4

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0,2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu ?? plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. Z Věty ?? a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. ♣

Řada
a spojitost
(minulé
cvičo)

12.5.21. Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^{\infty}(1,\infty)$.

5

Příklad 2.14. Funkce $s(x)$ je dána vztahem

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{2^k}=\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 3x}{8}+\dots .$$

Ukažme, že $s(x)$ je definovaná a spojitá pro všechna reálná x a vypočítejme její derivaci.

Řešení. Zřejmě platí

konvergence v $x_0=0$ automaticky

$$|f_k(x)|=\left|\frac{\sin kx}{2^k}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^k,\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad k=1,2,\dots .$$

Majorantní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria daná funkční řada konverguje stejnoměrně na celé reálné ose. Odtud také plyne spojitost $s(x)$ pro všechna reálná x.

Nyní prověříme, zda na $(-\infty,\infty)$ konverguje stejnoměrně také řada prvních derivací $f_k'(x)$. Vskutku,

fix interval $(-M,M)$

$$|f_k'(x)|=\left|\frac{k\cos kx}{2^k}\right|\le\frac{k}{2^k},\qquad x\in(-\infty,\infty),\qquad k=1,2,\dots .$$

omezený

Konvergenci majorantní řady $\sum_{k=1}^{\infty}k/2^k$ ověříme snadno užitím limitního podílového kritéria. Tedy podle Weierstrassova kritéria řada prvních derivací konverguje stejnoměrně, a podle věty o derivování funkční řady existuje $s'(x)$ a platí

$$s'(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{2^k}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cos kx}{2^k}=\frac{\cos x}{2}+\frac{2\cos 2x}{4}+\frac{3\cos 3x}{8}+\dots,\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

Shrnutí poznatků o funkčních řadách

Sečtením nekonečně mnoha funkcí obdržíme opět funkci, která však nemusí být definována na definičním oboru jednotlivých sčítanců, ale obecně pouze na nějaké jeho podmnožině (ta se určí jako množina všech x, pro která daná řada konverguje; může se stát, že řada nekonverguje pro žádné x, pak součtová funkce není definována nikde). Základní věty matematické analýzy o spojitosti, derivaci a integraci součtu dvou (resp. konečně mnoha) funkcí nelze automaticky rozšířit na nekonečné součty. Ke splnění těchto vlastností je třeba vyžadovat silnější typ konvergence, tzv. stejnoměrnou konvergenci.

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) = \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+n^2}\right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)$$
$$\geq N \log\left(1+\frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0,\infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0,\infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0,\infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0,2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu **??** plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. Z Věty **??** a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. ♣

6 **12.5.21. Příklad.** Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^{\infty}(1,\infty)$.

Řešení. Postupujeme indukcí. Nechť $q > 1$ je libovolné. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konverguje, a tedy z Příkladu 12.5.19 plyne stejnoměrná konvergence dané řady na $[q, \infty)$. Tedy ζ je spojitá na $(1, \infty)$.

Dokážeme nyní, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^k n}{n^x}, \quad x \in (1, \infty).$$

Pro $k = 0$ vzorec zjevně platí. Předpokládejme jeho platnost pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{k+1} n}{n^x}$$

fix interval $(1, M)$

konverguje lokálně stejnoměrně na $(1, \infty)$ (vizte Příklad 12.5.19), a tedy platí díky Větě **??** rovnost

$$\zeta^{(k+1)}(x) = \left(\zeta^k(x)\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \log^k n}{n^x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \log^{k+1} n}{n^x}.$$

Tedy ζ je třídy C^{∞} na $(1, \infty)$. ♣

12.5.22. Příklad. Zjistěte, kde jsou diferencovatelné funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Řešení. (a) Označme

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n + x}, \quad g_n(x) = \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

Nechť $N = \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Ukážeme, že

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

na každé množině tvaru $[-q, q] \setminus N$. Nechť tedy $q > 0$ je libovolné. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > q$. Pak pro $x \in [-q, q]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\frac{1}{(n + x)^2} \leq \frac{1}{(n - q)^2}.$$

Tedy máme

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{n^2}{(n + x)^2},$$

přičemž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightrightarrows$, $\frac{n^2}{(n+x)^2} \leq \frac{n^2}{(n-q)^2}$ a pro každé $x \in [-q,q]$ je posloupnost $\left\{\frac{n^2}{(n+x)^2}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ monotónní. (Vskutku,

$$\frac{n^2}{(n+x)^2} \geq \frac{(n+1)^2}{(n+1+x)^2}$$

právě tehdy, když

$$1 + \frac{1}{n+x} \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

To však nastává právě tehdy, když $x \leq 0$. Tedy daná posloupnost je nerostoucí, pokud $x \in [-q,0]$, a neklesající, pokud $x \in [0,q]$.) Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'$ tak konverguje stejnoměrně na $[-q,q]$. Protože původní řada konverguje v bodě $x = 0$, máme

$$\left(f(x) - \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x)\right)' = \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q,q] \setminus N.$$

Z toho však dostáváme

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [-q,q] \setminus N.$$

Jelikož q bylo libovolné, je f diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus N$.

7

(b) Z odhadu $|g_n(x)| \leq \frac{q}{n^2}$ platného pro $x \in [-q,q]$ vidíme, že řada definující g konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Máme

$$g_n'(x) = \operatorname{sign} x \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}, \quad x \neq 0,$$

$$\frac{|n^2-x^2|}{(n^2+x^2)^2} \leq \frac{n^2+x^2}{(n^2)^2} \leq \frac{n^2+q^2}{n^4}$$

a tedy pro interval $(0,q)$ platí

$$|g_n'(x)| \leq \frac{\cancel{q}(n^2+q^2)}{n^4}.$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{q}(n^2+q^2)}{n^4}$ konveregentní, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n' \rightrightarrows$ na $(0,q)$. Tedy

$$g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$$

na $(0,\infty)$. Obdobně odvodíme, že $g' = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'$ na $(-\infty,0)$.

Ukážeme nyní, že $g'(0)$ neexistuje. Díky Větě 12.1.7 máme

Prohození limit Moore - Osgood

$$g_+'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

a obdobně $g_-'(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tedy $g'(0)$ neexistuje. ♣