3. cvičení - Řady funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řad - zjistěte, pro jaká x řady konvergují (jako řady čísel); na jakém intervalu řady konvergují stejnoměrně a lok. stejnoměrně; na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: Jde o geometrickou řadu, která konverguje právě pro $x \in (-1, 1)$.
   - Stejnoměrná konvergence pro $x \in (-1, 1)$.
     Z přednášky víme, že $x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1, 1)$. Tedy řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
     Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1, 1)$.
   - Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme interval $[-a, a]$, kde $0 < a < 1$. Zafixujme n a hledejme

     $$\sigma_n = \sup\{|x^n|, x \in [-a, a]\}$$

     Zřejmě $\sigma_n = a^n$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ konverguje (jako řada čísel, jde o geometrickou řadu), tak z Weierstrassova kritéria

     $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [-a, a],$$

     tedy

     $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } (-1, 1).$$

   - Protože x^n jsou spojité funkce, tak z věty o řadě a spojitosti plyne, že součet řady je spojitá funkce na $(-1, 1)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$

   Řešení: Pracujeme na množině $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Jinak lze převést na předchozí případ.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: Pro $x = 0$ zjevně konverguje.
     Pro $x > 0$ máme geometrickou řadu

     $$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^n,$$

která konverguje.
Pro $x < 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, protože $\lim_{n\to\infty} x^2 e^{-nx} = \infty$.
Bodově konverguje tedy právě pro $x \in [0, \infty)$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right|, x \in [0, \infty)\right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\frac{x^2}{e^{nx}}\right)' = xe^{-nx}(2 - nx)$$

Nulové body: $x = \frac{2}{n}$.
Krajní body: $f_n(0) = 0$,

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2e^2}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2e^2}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in [0, \infty)$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $[0, \infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$, $x \in [0, \infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence:
Pro $x = 0$ jde o nulovou řadu, tedy konverguje.
Pro $x \in (0, \infty)$ je z Cauchyova kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n e^{-nx}} = xe^{-x} < 1,$$

což lze zjistit z průběhu funkce xe^{-x}.
Tedy řada konverguje pro $x \in [0, \infty)$.

- Stejnoměrná konvergence pro $x \in [0, \infty)$. Zafixujme n a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|x^n e^{-nx}|, x \in [0, \infty)\}$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací. Máme

$$(x^n e^{-nx})' = nx^{n-1}(1 - x)$$

Nulové body: $x = 1$. Máme

$$|f_n|(1) = e^{-n}$$

Krajní body:

$$|f_n|(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} |x^n e^{-nx}| = 0.$$

Tedy $\sigma_n = e^{-n}$.
Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ konverguje (jako řada čísel, jde o geometrickou řadu), tak z Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [0, \infty),$$

- Protože f_n jsou spojité funkce, tak z věty o řadě a spojitosti plyne, že součet řady je spojitá funkce na $[0, \infty)$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu má smysl vyšetřovat jen pro $x \geq 0$. Řada pak konverguje, LSK s $\frac{1}{n^3}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}\right|, x \in [0, \infty)\right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}\right)' = \frac{n(n^4 - 3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4 + x^2)^2}$$

Nulové body: $x = \frac{n^2}{\sqrt{3}}$.
Krajní body: $f_n(0) = 0$,

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = f_n\left(\frac{n^2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{n \cdot \frac{n}{\sqrt[4]{3}}}{n^4 + \frac{n^4}{3}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in [0, \infty)$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $[0, \infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Na celém $\mathbb{R}$ řada konverguje (LSK s $\frac{1}{n^4}$, pro $x = 0$ je identicky nulová).
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup \left\{ \left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right|, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\frac{nx}{1+n^5x^2} \right)' = \frac{n(1-n^5x^2)}{(1+n^5x^2)^2}$$

Nulové body: $x = \pm\frac{1}{n^{5/2}}$.
Krajní body:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = f_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Na celém $\mathbb{R}$ řada konverguje (LSK nebo SK s $\frac{1}{n^2}$, pro $x = 0$ je identicky nulová).
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup \left\{ \left| \frac{x^2}{1+n^2x^2} \right|, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Odhady pro $x \neq 0$:

$$\frac{x^2}{1+n^2x^2} \leq \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$$

Pro $x = 0$ je také

$$\frac{x^2}{1+n^2x^2} = 0 \leq \frac{1}{n^2}$$

Tedy supremum

$$\sigma_n \leq \frac{1}{n^2}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: pro $x = 0$ řada zřejmě diverguje, pro $x \neq 0$ konverguje srovnánímm s $\frac{1}{n^2}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right|, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}.$$

Pro bod $x = \frac{1}{n}$ máme

$$\sigma_n \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$, tedy o stejnoměrné konvergenci nelze rozhodnout.
Zkusíme vyšetřit nutnou podmínku. Máme $f_n \to 0$. Ale $\sigma_n = \frac{1}{2} \not\to 0$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \not\rightrightarrows$$

na $\mathbb{R}$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme interval $[a, \infty)$, kde $0 < a$ (analogicky $(-\infty, -a]$ pro $(-\infty, 0)$). Zafixujme n a hledejme

$$\sigma_n = \sup\left\{\frac{1}{1+n^2x^2}, x \in [a, \infty)\right\}$$

Zřejmě $\sigma_n = \frac{1}{a^2n^2+1}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ konverguje (jako řada čísel, lze srovnat s $\frac{1}{n^2}$), tak z Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [a, \infty),$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } (0, \infty).$$

Analogicky

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } (-\infty, -a],$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } (-\infty, 0).$$

Protože f_n jsou spojité funkce na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$

Řešení:

- Bodová konvergence: Pro $x = 0$ zjevně konverguje. Pro $x \neq 0$ konverguje z LSK s $\frac{1}{n^3}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)\right|, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)\right)' = \frac{2\left(-x^2+n^3\right)}{4x^2+\left(x^2+n^3\right)^2}$$

Nulové body: $x = \pm\sqrt{n^3}$.
Krajní body:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = |f_n|\left(\pm\sqrt{n^3}\right) = \arctan\frac{2\sqrt{n^3}}{2n^3} = \arctan\frac{1}{n^{3/2}}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje srovnáním s $\frac{1}{n^{3/2}}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: pro $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\left|\frac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

- Stejnoměrná konvergence Stejně tak lze odhadnout supremum

$$\sigma_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows .$$

Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Na celém $\mathbb{R}$ řada konverguje (SK s $\frac{1}{n^\alpha}$).
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup \left\{ \left| \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right|, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Odhady

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(l)♡ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right)$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Máme odhad $\log(1+t) \leq t$ pro $t > -1$. Tedy

$$\log\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n \ln^2 n}$ konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup \left\{ \left| \log\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \right|, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Krajní body:

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) = \infty$$

Tedy supremum

$$\sigma_n = \infty,$$

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ nekonverguje, tedy takto o stejnoměrné konvergenci řady nelze rozhodnout.

- Nutná podmínka: Bodová limita: zafixujeme $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) = 0.$$

Supremový test: Neboť $\sigma_n = \infty$, tak máme

$$f_n \not\rightrightarrows \text{ na } \mathbb{R}.$$

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme interval $[-a, a]$, kde $0 < a$. Zafixujme n a hledejme

$$\sigma_n = \sup\left\{\log\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), x \in [-a, a]\right\}$$

Zřejmě $\sigma_n = \frac{a^2}{n\log^2 n}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, tak z Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [-a, a],$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } \mathbb{R}.$$

Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

2. Vyšetřete konvergenci řad (může dojít na BC podmínku).

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$, $x \in [0, \infty)$

Příklad 13.8. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,, \quad \text{kde} \quad f_k(x) := x^k e^{-kx} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_-$, konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_+^0$. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f_k'(x) = kx^{k-1}(1-x)$, protože se tato derivace v $\mathbb{R}_+$ rovná 0, právě když je $x = 1$, a protože $f_k(0) = f_k(+\infty-) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$, nabývá nezáporná funkce $f_k\,|\,\mathbb{R}_+^0$ v bodě 1 svého maxima. (Sr. s V.8.2.)

Konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ je tedy majorantou v $\mathbb{R}_+^0$ řady (39), která tam proto podle srovnávacího kritéria konverguje stejnoměrně.

Příklad 13.9°. Porovnejme stejnoměrnost konvergence řad o členech

$$f_k(x) := \frac{x}{1+k^2x^2} \quad \text{a} \quad g_k(x) := \frac{x^2}{1+k^2x^2}\,, \tag{40}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0)$ jsou nulové, tedy konvergentní; je-li $x \neq 0$, je

$$|\,f_k(x)\,| \le \frac{|\,x\,|}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2|\,x\,|} \quad \text{a} \quad 0 \le g_k(x) \le \frac{x^2}{k^2x^2} \le \frac{1}{k^2}\,. \tag{41}$$

Z toho plyne, že

$$\text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ konverguje v } \mathbb{R} \text{ bodově, řada } \sum_{k=1}^{\infty} g_k \text{ stejnoměrně.} \tag{42}$$

Z prvního odhadu je zároveň patrné, že $|x| \ge \delta > 0 \Rightarrow |\,f_k(x)\,| \le 1/k^2\delta$, takže (podle V.13.13)

$$\text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ konverguje stejnoměrně v } \mathbb{R} - U(0,\delta) \text{ pro každé } \delta \in \mathbb{R}_+\,. \tag{42}$$

Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ nekonverguje stejnoměrně v žádném } P^+(0) \text{ a v žádném } P^-(0)\,; \tag{43}$$

vzhledem k lichosti funkcí f_k stačí nestejnoměrnost konvergence dokázat jen pro intervaly tvaru $(0,\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$. K tomu stačí ověřit *neplatnost* příslušné BC podmínky, tj. *platnost* její negace, která zní:

(44) *Existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $x \in (0,\delta)$ *tak, že* $|\,\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\,| \ge \varepsilon$.

V našem případě však platí dokonce toto silnější a konkrétnější tvrzení:

(45) $$n > \frac{1}{2\delta} \Rightarrow \frac{1}{2n} \in (0, \delta)\,, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) \geq \frac{1}{4}\,.$$

Z nerovnosti $k \leq 2n$ totiž plyne, že $k/2n \leq 1$, takže $1 + (k/2n)^2 \leq 2$ a

$$f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n\,(1 + (k/2n)^2)} \geq \frac{1}{4n}\,.$$

Résumé. Přes podobnost funkcí (40) se obory stejnoměrné konvergence příslušných řad podstatně liší: *Druhá řada konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$, první konverguje stejnoměrně v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, právě když není $0 \in \overline{I}$, takže její konvergence je lokálně stejnoměrná v $\mathbb{R} - \{0\}$ a nestejnoměrná v každém $P^+(0)$ i v každém $P^-(0)$.*

Podstatný rozdíl v chování obou řad způsobil faktor x, kterým se $g_k(x)$ liší od $f_k(x)$ a který podstatně zmenšil hodnoty funkcí $g_k(x)$ v blízkosti počátku.

Poznámka 13.8. Jsou-li splněny předpoklady srovnávacího kritéria (V.13.13), konvergují obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ stejnoměrně; někdy se v takové situaci říká, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje **absolutně stejnoměrně**. Poznamenejme, že v tvrzení V.13.13 by stačilo uvést, že stejnoměrně konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$, protože stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ pak již zaručuje BC kritérium.

Stejnoměrně konvergující řadu, pro niž řada příslušných absolutních hodnot diverguje, lze sestrojit velmi snadno. Čtenář, který by nebyl spokojen s neabsolutně konvergentní řadou o členech $f_k := (-1)^k/k$ (ačkoli je to zcela právoplatný příklad, protože konvergentní řady s konstantními členy nejsou „zakázány“ a konvergují samozřejmě stejnoměrně), může vyšetřit např. řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x)\,, \quad \text{kde } \; g_k(x) := \frac{\operatorname{arctg}(1 + k^2x^2)}{k}\,,$$

která podle Abelova kritéria konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$, zatímco řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ příslušných absolutních hodnot všude v $\mathbb{R}$ diverguje, protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $g_k(x) \geq g_k(0) \geq \pi/4k$.

Může se však stát, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na nějaké množině X *konverguje absolutně i stejnoměrně*, *nikoli však absolutně stejnoměrně*; ukazuje to tento příklad:

Buďte f_k funkce z Př. 13.9, položme

(46) $$h_{2k-1} := f_k\,, \quad h_{2k} := -f_k \;\text{ pro každé }\; k \in \mathbb{N}$$

a s_n resp. σ_n nechť je n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak

(47) $$s_{2n-1}(x) = f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}\,, \quad s_{2n} \equiv 0\,,$$

a protože nerovnosti $|f_n(x)| \leq f_n(1/n) \leq 1/2n$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$, je $s_n \to 0$ stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

minulém příkladě. Následující příklad ukazuje, že Weierstrassovo kritérium není nutnou podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci ani v kombinaci s §86.

<u>Příklad</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, kde

$$a_1(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in (0,\pi), \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus (0,\pi); \end{cases}$$
$$a_n(x) = \frac{1}{n} a_1(x-(n-1)\pi) \text{ pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \geq 2 \text{ ?}$$

Řešení. Řada zřejmě konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, protože $a_n(x)$ je nenulové nejvýše pro jedno $n \in \mathbb{N}$. Přitom $a_n(x) \geq 0$ a $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} a_n(x) = \frac{1}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, Weierstrassovo kritérium tedy použít nelze.

Nicméně, označíme-li $s(x)$ součet a $s_n(x)$ n-tý částečný součet naší řady, platí $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |s(x)-s_n(x)| = \frac{1}{n+1}$, řada tedy konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. ■

§88. Ekvivalentní podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řady je **Bolzano-Cauchyova podmínka**.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in M)\left(\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x)\right| < \varepsilon\right).$$

23 <u>Příklad</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$?

Řešení. Z limitního srovnávacího kritéria plyne (viz §43), že naše řada je (absolutně) konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Označme $a_n(x) = \frac{nx}{n^4+x^2}$ a zkusme opět najít maximum funkce $|a_n(x)|$.

Pro $x \in \mathbb{R}$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-x^2)}{(n^4+x^2)^2}$. Proto je funkce a_n klesající na $(-\infty,-n^2]$, rostoucí na $[-n^2,n^2]$ a klesající na $[n^2,\infty)$. Protože limita funkce a_n v $-\infty$ i v $+\infty$ je rovna 0, je v bodě $-n^2$ minimum a v bodě n^2 maximum. Je tedy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |a_n(x)| = a_n(n^2) = 1/2n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2n$ je však divergentní, a tak nelze použít Weierstrassovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci na $\mathbb{R}$.

Když si však uvědomíme, co jsme zjistili o monotonii funkcí a_n, vidíme, že z Weierstrassova kritéria plyne stejnoměrná konvergence naší řady na intervalu $[-T,T]$ pro každé $T \in (0,\infty)$. Zdůvodněme to podrobně:

Je-li $x \in [-T, T]$ a $n > \sqrt{T}$, pak $|a_n(x)| \leq a_n(T)$. Přitom řada $\sum\limits_{n>\sqrt{T}} a_n(T)$ konverguje (řada ze zadání konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy i pro T). Proto řada $\sum\limits_{n>\sqrt{T}} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na [$-T, T$] dle Weierstrassova kritéria. Dle §86 na tomto intervalu konverguje stejnoměrně i řada ze zadání.

To, že řada nekonverguje stejnoměrně na (T, ∞) pro žádné $T \in \mathbb{R}$ dokážeme pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky. Je totiž

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)n^2}{(n+k)^4 + n^4} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{2(n+k)^3} \geq n \cdot \frac{n^2}{2(n+n)^3} = 1/16.$$

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/16$. Je-li $n_0 \in \mathbb{N}$, vezměme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq n_0$ a $n^2 > T$, dále položme $p = n$ a $x = n^2$. Pak uvedený výpočet ukazuje, že není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, konvergence tedy není na (T, ∞) stejnoměrná. Podobně, nebo s využitím faktu, že funkce a_n jsou liché, vidíme, že řada nekonverguje stejnoměrně na $(-\infty, T)$ pro žádné $T \in \mathbb{R}$.

Shrňme výsledky: Řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, stejnoměrně na každém omezeném intervalu, na žádném neomezeném intervalu konvergence stejnoměrná není. ■

§89. Jednou z postačujících podmínek pro stejnoměrnou konvergenci ne nutně absolutně konvergentních řad je **Dirichletovo kritérium**.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) Částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ jsou stejně omezené na M (tj. existuje takové $K \in \mathbb{R}$, že pro každé $x \in M$ a $N \in \mathbb{N}$ je $|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)| \leq K$).

(ii) Posloupnost $\{b_n(x)\}$ je monotónní pro každé $x \in \mathbb{R}$ a stejnoměrně konverguje k 0.

P ř í k l a d Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \ ?$$

Řešení. Pro $x = 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \neq 0$ zřejmě konverguje podle Leibnizova kritéria (že konvergence není absolutní lze zjistit například srovnáním s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pomocí limitního srovnávacího kritéria).

Zkoumejme nyní stejnoměrnou konvergenci na intervalu $\left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$. Zde platí

$$|f_n(x)| \le \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3}+\varepsilon)\right)^{2n}}{\sqrt{\log n}},$$

přičemž

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(4\cos^2(\frac{\pi}{3}+\varepsilon)\right)^{n}}{\sqrt{\log n}}$$

konverguje. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $\left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$ dle Věty 12.3.3.

Na intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ použijeme Větu 12.3.6. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ totiž konverguje stejnoměrně, pro každé $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ je $\{(4\cos^2 x)^n\}$ monotónní a $\left|(4\cos^2 x)^n\right| \le 1$. Tedy

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}} (4\cos^2 x)^n$$

konverguje stejnoměrně na $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Na intervalu $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ postupujeme obdobně.

Díky Větě 12.1.8 je tak f spojitá na $\mathcal{D}(f)$.

Ukažme ještě, že $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ nekonverguje stejnoměrně na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Kdyby tomu tak bylo, tak z Věty 12.1.7 plyne existence vlastní limity

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{\log n}},$$

což není pravda. ♣

2c

12.5.18. Příklad. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konveregenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right), \qquad x \in [0,\infty).$$

Řešení. Jelikož $\log(1+t) \le t$, $t \in [0,\infty)$, máme pro $f_n(x) = \log\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$ odhad

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2} \le 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{i} nftyf_n(x)$ konverguje na $[0,\infty)$.

Pro libovolný interval $[0,q]$ též máme odhad

$$|f_n(x)| = f_n(x) \le \frac{q}{n^2}, \qquad x \in [0,q],$$

což dle Věty 12.3.3 implikuje stejnoměrnou konvergenci na $[0,q]$.

Řada však nekonverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$, neboť pro libovolné $N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{2N} f_n(N) &= \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+n^2}\right) \geq \sum_{n=N}^{2N} \log\left(1+\frac{2N}{N^2+(2N)^2}\right)\\ &\geq N\log\left(1+\frac{2}{5N}\right) \to \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku na $[0,\infty)$, takže daná řada zde nekonverguje stejnoměrně. ♣

12.5.19. Příklad. Nechť $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, a $x_0 \in \mathbb{R}$ jsou takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$$

konverguje. Ukažte, že pak řada konverguje stejnoměrně na $[x_0,\infty)$.

Řešení. Pro $x \in [x_0,\infty)$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \rightrightarrows$ a $\left\{\frac{1}{n^{x-x_0}}\right\}$ je monotónní omezená posloupnost, tvrzení plyne z Věty 12.3.6. ♣

12.5.20. Příklad. Ukažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$ a spojitou druhou derivaci na $(0,2\pi)$.

Řešení. Zjevně platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Označme $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$ a uvažujme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin nx}{n}.$$

Z odhadu $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ a Věty 12.3.3 plyne stejnoměrná konvergence řady derivací na $\mathbb{R}$. Z Příkladu **??** plyne lokálně stejnoměrná konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. Z Věty **??** a 12.1.8 tak plyne spojitost $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na $\mathbb{R}$ a spojitost $f'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$ na $(0,2\pi)$. ♣

12.5.21. Příklad. Dokažte, že Riemannova funkce zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

splňuje $\zeta \in C^{\infty}(1,\infty)$.

Bonus

3. Ukažte, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně na (a, b), konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně na (a, b).
Řešení: Plyne z B-C podmínky. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b). Pak

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall m, n,\, m \geq n \geq n_0\, \forall x \in (a, b) : \left| \sum_{j=n}^{m} |f_j(x)| \right| < \varepsilon.$$

Zvolme ε a uvažujme n_0, $m, n \geq n_0$ jako výše. Pak

$$\left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| \leq \left| \sum_{j=n}^{m} |f_j|(x) \right| < \varepsilon,$$

tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje.

4. (a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0, 1)$. Může být f neomezená?
Řešení: Ano.
Uvažujme $f_n = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$. Pak $f_n \to \frac{1}{x}$. Navíc

$$\sigma_n = \sup_{x \in (0,1)} |f_n - f| = \sup_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$. Ale f je neomezená na $(0, 1)$.

(b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0, 1)$. Nechť f_n jsou omezené. Může být f neomezená?
Řešení: Ne.
Zvolme $\varepsilon = 1$. Z definice stejnoměrné spojitosti existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ a $x \in (0, 1)$ je

$$|f_n(x) - f(x)| < 1.$$

Zvolme pevné $n \geq n_0$. Protože f_n jsou omezené, tak existuje $M \geq 0$ tak, že pro každé $x \in (0, 1)$ je

$$|f_n(x) \leq M|.$$

Dohromady pro každé $x \in (0, 1)$ platí

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M.$$

(c) Nechť $g_n \to g$, g jsou omezené funkce. Může být g neomezená?
Řešení: Ano. Např. $g_n = \frac{n}{nx+1}$ na $(0, 1)$. Pak $g_n \to \frac{1}{x}$, $|g_n| \leq n$, ale $\frac{1}{x}$ není omezená.