2. cvičení - Posloupnosti funkcí 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA201-1819/Cv08%20-%20Stejnom%c4%9brn%c3%a1%20konvergence%20II%20-%20posloupnosti%20funkc%c3%ad%202.pdf

1. Vyšetřete konvergenci funkcí – najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: Protože pro $x \in (0, 1)$ je výraz $x - 1 < 0$, tak máme
   $$\lim_{n\to\infty} e^{n(x-1)} = 0.$$
   Tedy, $f = 0$ pro $x \in (0, 1)$.
   - Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
   $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0, 1)\}.$$
   Zřejmě platí, že
   $$\sigma_n = f_n(1) = 1.$$
   $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1 \neq 0.$$
   Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
   $$f_n \not\rightrightarrows f.$$
   na $(0, 1)$.
   Pozn.: Lze řešit i přes Moore-Osgoodovu větu. Pak počítáme $\lim_{x\to 1-}$.
   - Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme $0 < a < b < 1$ a interval $[a, b]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
   $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [a, b]\}.$$
   Vzhledem k monotonii e^y máme
   $$\sigma_n = e^{n(b-1)}$$
   a
   $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$$
   Tedy
   $$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } [a, b].$$
   Odtud
   $$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (0, 1).$$

(b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$ na $(0,\infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+1+\frac{x}{n}} = x$$

  Tedy, $f = x$ pro $x \in (0,\infty)$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0,\infty)\}.$$

  Platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{-x-x^2}{1+n+x}\right|$$

  V krajních bodech je

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{-x-x^2}{1+n+x}\right| = \infty,$$

  tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$

  Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$

  na $(0,\infty)$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme $0 < a < b < \infty$ a interval $[a,b]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [a,b]\}.$$

  Můžeme odhadnout

$$\left|\frac{-x-x^2}{1+n+x}\right| = \frac{x+x^2}{1+n+x} \leq \frac{x^2+x}{1+n} \leq \frac{b+b^2}{1+n+x}.$$

  Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b+b^2}{1+n+x} = 0.$$

  Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$

  Tedy

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } [a,b].$$

  Odtud

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (0,\infty).$$

(c) $f_n(x) = \dfrac{\log(nx)}{n}$ na $(0, \infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence: Ze škály (nebo LH) máme
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(nx)}{n} = 0$$
Tedy, $f = 0$ pro $x \in (0, \infty)$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0, \infty)\}.$$
V krajních bodech
$$\lim_{x\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(nx)}{n} = \infty.$$
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f.$$
na $(0, \infty)$.
- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme $0 < a < b < \infty$ a interval $[a, b]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [a, b]\}.$$
Funkce $\frac{\log(nx)}{n}$ je monotónní (v x), tedy
$$\sigma_n = \max\left\{\left|\frac{\log na}{n}\right|, \left|\frac{\log nb}{n}\right|\right\}.$$
Protože
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\log na}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\log nb}{n}\right| = 0,$$
je
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$$
Tedy
$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } [a, b].$$
Odtud
$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (0, \infty).$$

(d) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \log \dfrac{x}{n}$ na $(0, \infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in (0, \infty)$. Pak z růstové škály nebo LH máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \log \frac{x}{n} = 0.$$

Tedy, $f = 0$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0, \infty)\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|\frac{x}{n} \log \frac{x}{n}\right|.$$

Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy

$$\left(\frac{x}{n} \log \frac{x}{n}\right)' = \frac{1}{n}\left(1 + \log \frac{x}{n}\right)$$

Nulové body:

$$-1 = \log \frac{x}{n}$$
$$\frac{1}{e} = \frac{x}{n}$$
$$\frac{n}{e} = x$$

Platí

$$(f_n - f)\left(\frac{n}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

Tedy

$$\sigma_n \geq \frac{1}{e}.$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$

na $(0, \infty)$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence:
Problematické body: $x = \infty$.
Uvažujme $0 < a < b < \infty$ a interval $[a, b]$.
Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [a, b]\}.$$

Z předchozího postupu víme, že nulový bod derivace je v bodě $x_0 = \frac{n}{e}$. Od jistého n_0 tento bod neleží v intervalu $[a, b]$.
Extrémy tedy budeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme

$$|f_n(x) - f(x)|(a) = \left|\frac{a}{n} \log \frac{a}{n}\right|, \qquad |f_n(x) - f(x)|(b) = \left|\frac{b}{n} \log \frac{b}{n}\right|$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a}{n}\log\frac{a}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b}{n}\log\frac{b}{n}\right| = 0$$

je

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$$

Tedy

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } [a,b].$$

Odtud

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (0,\infty).$$

(e) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Tedy, $f = |x|$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0,\infty)\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2}\right| = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2}} \le \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n}$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

tak i

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $\mathbb{R}$.

(f) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0,\infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in (0,\infty)$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tedy, $f = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0,\infty)\}.$$
Odhadujeme tedy výraz
$$\left|\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)} = \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2}$$
Zkusíme najít extrémy v krajních bodech. Máme
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = \infty$$
Tedy
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f.$$
na $(0,\infty)$.
- Lokálně stejnoměrná konvergence:
Problematické body: $x = 0$.
Uvažujme $0 < a < b < \infty$ a interval $[a,b]$.
Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [a,b]\}.$$
Odhady
$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} \leq \frac{1}{2n\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x})^2} \\ &\leq \frac{1}{2n\sqrt{a}(2\sqrt{a})^2} = \frac{1}{8n\sqrt{a^3}}\end{aligned}$$
Protože
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8n\sqrt{a^3}} = 0$$
je
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$$
Tedy
$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } [a,b].$$
Odtud
$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (0,\infty).$$

(g) $f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n$ na $[0, \infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in [0, \infty)$. Pro $x = 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Pro $x \in (0, \infty)$ převedeme pomocí VOLSF na limitu $\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n = 0.$$

Tedy, $f = 0$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0, \infty)\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left| \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n \right|.$$

Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy

$$\left(\sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n \right)' = \frac{1}{2} n^{-\sqrt{x}} \log n \left(-\log n + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Nulové body:

$$\log n = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x = \frac{1}{\log^2 n}$$

Platí

$$(f_n - f)\left(\frac{1}{\log^2 n} \right) = \frac{1}{e}$$

Tedy

$$\sigma_n \geq \frac{1}{e}.$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$

na $[0, \infty)$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Problematický bod je $x = 0$.
Uvažujme tedy $b \in (0, \infty)$ a interval $[0, b)$. Pak zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0, b)\}.$$

Z předchozího postupu víme, že nulový bod derivace je v bodě $x_0 = \frac{1}{\log^2 n}$. Od jistého n_0 tento bod náleží intervalu $[0, b)$.

Dohromady máme od jistého n_0

$$\sigma_n \geq \frac{1}{e}$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$

Závěr:

$$f_n \not\rightrightarrows f, \qquad \text{na } [0,b) \quad \forall b \in (0,\infty)$$
$$\text{a } f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } [0,\infty).$$

(h) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$ na $[0,\infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in [0,\infty)$. Uvažujme $x \in [0,3]$. Pak ze dvou policajtů:

$$3 \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \to 3$$

Pro $x \in (3,\infty)$ máme odhady

$$x \leq \sqrt[n]{x^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{x^n + x^n} = x\sqrt[n]{2} \to x$$

Tedy

$$f = \begin{cases} 3, & x \in [0,3], \\ x & x \in (3,\infty). \end{cases}$$

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0,\infty)\}.$$

Zkusíme najít extrémy pomocí derivace. Nejprve uvažujme $x \in (0,3)$.

$$\left(\sqrt[n]{x^n + 3^n} - 3\right)' = \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1}$$

Bez nulových bodů.
Dále uvažujme $x \in (3,\infty)$.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{x^n + 3^n} - x\right)' &= \frac{1}{n}(x^n + 3^n)^{\frac{1}{n}-1} n x^{n-1} - 1 \\ &= x^{n-1}(x^n)^{\frac{1}{n}-1}\left(1 + \left(\frac{3}{x}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}-1} - 1 \\ &= \left(1 + \left(\frac{3}{x}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}-1} - 1 < 0\end{aligned}$$

Bez nulových bodů - to plyne z následující úvahy: Výraz $1+\left(\frac{3}{x}\right)^n > 1$. Zároveň exponent $\frac{1}{n} - 1 < 0$. Dohromady $\left(1 + \left(\frac{3}{x}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}-1} < 1$.
Tedy hledáme supremum v krajních bodech.

$$|f_n - f|(0) = 3 - 3 = 0, \qquad |f_n - f|(3) = \sqrt[n]{3^n + 3^n} - 3 = 3(\sqrt[n]{2} - 1)$$

Navíc
$$\lim_{n\to\infty} 3(\sqrt[n]{2}-1)=0.$$
Dále
$$\lim_{x\to\infty} |f_n - f| = \sqrt[n]{x^n+3^n} - x = x\sqrt[n]{1+\frac{3^n}{x^n}} - x = 0.$$
Limitu je možno spočítat Taylorem.
Tedy
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \rightrightarrows f.$$
na $[0,\infty)$.

Zkouškové příklady

2. Vyšetřete konvergenci funkcí – najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.
   (a) $f_n(x) = n \arctan \dfrac{x}{n}$
   (b) $f_n(x) = \left|\cos \dfrac{x}{n}\right|^n$
   (c) $f_n(x) = \dfrac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}$
   (d) $f_n(x) = e^{\frac{|x|-n}{|x|+n}} + e^{-\frac{|x|-n}{|x|+n}}$
   (e) $f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{\sqrt{x}}{n}}-1}{\tan(\frac{1}{n})}$, $[0,\infty)$
   (f) $f_n(x) = \dfrac{\log(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

potřebujeme spočítat limitu v $\pi-$ a $\pi+$ funkce $\log(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} - \log(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1) - \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pi-} \log\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} - \log\left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} \\
&\quad = \lim_{x\to\pi-} \log \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} - \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Limita zprava v bodě π vyjde analogicky $\frac{-\pi}{2\sqrt{2}}$. Dostáváme tedy:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x + 2}\, dx = F(x) + C \text{ na } \mathbf{R},$$

kde

$$F(x) = \begin{cases} \log \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} - \frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & x = (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Příklad 2. Nejprve vyšetříme bodovou konvergenci. Pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí

2a

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x.$$

(Používáme fakt, že $\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = \operatorname{arctg}' 0 = 1$, Heineho větu a větu o aritmetice limit.) Pro $x = 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = x,$$

je tedy

$$f_n \to x \text{ na } \mathbf{R}.$$

Dále zkoumejme, na kterých intervalech je tato konvergence stejnoměrná.
Protože pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) - x = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) - x = +\infty,$$

není konvergence stejnoměrná na žádném neomezeném intervalu (tj. na intervalu $(-\infty, c)$ ani na $(c, +\infty)$ pro $c \in \mathbf{R}$). Abychom prozkoumali povahu konvergence na omezených intervalech, vyšetřeme průběh funkce $f_n(x) - x$, konkrétně její monotonii. Její derivace je pro každé $x \in \mathbf{R}$ rovna

$$(f_n(x) - x)' = f_n'(x) - 1 = n \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} - 1 = \frac{n^2}{n^2 + x^2} - 1 = \frac{-x^2}{n^2 + x^2},$$

funkce $f_n(x) - x$ je tedy klesající na $\mathbf{R}$. Protože je zároveň lichá, je zřejmě pro každé $c > 0$

$$\sup\{|f_n(x) - x| : x \in \langle -c, c \rangle\} = |f_n(c) - c|.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} |f_n(c) - c| = 0$ pro každé c, je konvergence stejnoměrná na intervalu $\langle -c, c\rangle$ pro každé $c > 0$, tedu i na všech omezených intervalech.
Závěr: Posloupnost f_n konverguje bodově k x na $\mathbf{R}$. Konvergence je stejnoměrná na omezených intervalech, není stejnoměrná na neomezených intervalech.

tedy $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$

2b

$f_n(x) = \left|\cos\frac{x}{n}\right|^n$ $\qquad D_{f_n} = \mathbb{R}$

- bodově, fix x $\qquad$ pro $x=0$ je $\lim = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\cos\frac{x}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln\left|\cos\frac{x}{n}\right|} = e^0 = 1$$

1^∞

$$\lim_{n\to\infty} n\, \underbrace{\frac{\ln\left|\cos\frac{x}{n}\right|}{\left|\cos\frac{x}{n}\right|-1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\left(\left|\cos\frac{x}{n}\right|-1\right)}{-\frac{x^2}{n^2}}}_{1/2} \cdot \frac{-x^2}{n^2} = 0$$

- stejn., fix n:

$$\tau_n = \sup\left\{ \left|\left|\cos\frac{x}{n}\right|^n - 1\right|,\ x\in\mathbb{R} \right\}$$

pro $\frac{x}{n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ máme $\tau_n = 1$.

tedy $f_n \not\rightrightarrows$

- lok: zvolme interval $[-a,a]$. Pak $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ $[-a,a] \subsetneq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

pak $\tau_n = \left(\cos\frac{a}{n}\right)^n - 1$

a $\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^n - 1 = 0$

$\to$ $f_n \rightrightarrows f$ na $[-a,a]$

$\to$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$

2c

$$f_n(x) = \frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}} \qquad D_{f_n} = \mathbb{R}$$

- fix x, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}} = \lim \frac{n}{n} \frac{\frac{x}{n}+1}{\sqrt{(\frac{x}{n})^2+1}} = \underline{\underline{1}} =: f \qquad D_f = \mathbb{R}$

  f_n i f spoj. na $\mathbb{R}$

- $\sigma_n = \sup \left\{ \left| \underbrace{\frac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}}_{g_n(x)} - 1 \right|, \ x \in \mathbb{R} \right\}$

fix n,

$$g_n'(x) = \frac{\sqrt{x^2+n^2} - (x+n)\cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} \cdot \cancel{2}x}{x^2+n^2} = \frac{x^2+n^2 - x(x+n)}{(x^2+n^2)\sqrt{x^2+n^2}}$$

$$= \frac{n^2 - xn}{(x^2+n^2)\sqrt{x^2+n^2}} \qquad n(n-x) \qquad x_0 = n$$

$(x^2+n^2)\sqrt{x^2+n^2} > 0$

g_n': $+$ on $(-\infty, n)$ $\nearrow$, $-$ on (n, ∞) $\searrow$

pro $x_0 = n$: $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} = -1-1 = -2 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\frac{n+n}{\sqrt{n^2+n^2}} - 1 = \frac{2n}{\sqrt{2}\, n} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \quad (\doteq 0{,}41)$$

$\sup g_n(x) \geq \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \not\to 0 \quad \to \quad f_n$ nekonv. stejnom. na $\mathbb{R}$

- zvolme interval $[a, b]$

problematické body: $-\infty$ a "n"

pro $n \geq n_0 \geq b$ máme kandidáty na max (spoj. na komp.) v krajních bodech, tedy

$$\sigma_n = \max \left\{ \left| \frac{a+n}{\sqrt{a^2+n^2}} - 1 \right|, \left| \frac{b+n}{\sqrt{b^2+n^2}} - 1 \right| \right\}$$

ale pro lim platí: první člen $\xrightarrow{n\to\infty} 0$, druhý člen $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

tedy máme ~~loc.~~ $\rightrightarrows$ na $\forall$ om. intervalu $\Longrightarrow f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$

2d

$$f_n = \exp\left(\frac{|x|-n}{|x|+n}\right) + \exp\left(-\frac{|x|-n}{|x|+n}\right) \qquad Df_n = \mathbb{R}$$

(f_n jsou sudé)

- bodově, fix x:

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{\frac{|x|}{n}-1}{\frac{|x|}{n}+1}\right) + \exp\left(-\frac{\frac{|x|}{n}-1}{\frac{|x|}{n}+1}\right) = e^{-1}+e^{1} = \underline{\underline{e+\tfrac{1}{e}}}$$

- stejnoměrně, fix n:

$$\sigma_n = \sup \left| \overbrace{\exp(\quad) + \exp(-(\quad))}^{g_n(x)} - e - \tfrac{1}{e} \right|$$

f_n sudé, BÚNO $x \geq 0$, pro $x=0$ $f_n(0) = e^{-1}+e^{1}$

$$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = 0$$

$$g_n'(x) = e^{(\quad)} \cdot \frac{\overbrace{(x+n)-(x-n)}^{2n}}{(x+n)^2} + e^{(-\quad)} \cdot - \frac{(x+n)-(x-n)}{(x+n)^2}$$

$$= \frac{2n}{(x+n)^2}\left(e^{(\quad)} - e^{-(\quad)}\right) \geq 0$$

$$\frac{x-n}{x+n} = -\frac{x-n}{x+n} \qquad x-n = -x+n \qquad 2x = +2n \qquad x_0 = n$$

Podezřelé body: $x=0$, $x \to \infty$, $x = \pm n$

$$0 \qquad x=n \qquad 0$$

pro $x_0 = \pm n$ máme

$$\left|e^{0}+e^{-0}-e-\tfrac{1}{e}\right| = \left|2-e-\tfrac{1}{e}\right| \not\to 0$$

tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$

- lokálně: na $[-d,d]$ je max v $x_0 = d$ pro $d<n$ (volba nezno)

$$\to \lim_{n\to\infty} \underbrace{e^{\frac{d-n}{d+n}} + e^{-\frac{d-n}{d+n}} - e - \tfrac{1}{e}} = e^{-1}+e^{-(-1)} - e - \tfrac{1}{e} = 0$$

$$\to f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$$

$$f_n = \frac{e^{\frac{\sqrt{x}}{n}} - 1}{\tan \frac{1}{n}} \qquad x \in [0, \infty)$$

- bod. lim: fix x

$x \neq 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n}{\tan 1/n} \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{x}}{n}} - 1}{\frac{\sqrt{x}}{n}} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{x}$

$x = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0}{\tan 1/n} = 0$

tedy $f = \sqrt{x}$

- st. konv., hledáme

$$\tau_n = \sup_{x \in [0,\infty)} \left\{ \left| \frac{e^{\frac{\sqrt{x}}{n}} - 1}{\tan 1/n} - \sqrt{x} \right| \right\}$$

lim v krajních bodech

$$\lim_{x\to\infty} \left| e^{\frac{\sqrt{x}}{n}} \left(\frac{1 - \frac{1}{e^{\sqrt{x}/n}}}{\tan 1/n} - \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}/n}} \right) \right| = \infty \left(\frac{1-0}{\tan 1/n} - 0 \right) = \infty$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$

$\Rightarrow \quad f_n \not\rightrightarrows f \quad$ na $[0, \infty)$

- lok. st. konv.

Uvažujme interval $[0, b]$, $b > 0$

Hledáme

$$\sup_{x \in [0,b]} |f_n - f|$$

Derivace

$$(f_n - f)' = \frac{e^{\sqrt{x}/n}}{n \tan 1/n \quad 2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{e^{\sqrt{x}/n}}{n \tan \frac{1}{n}} - 1 \right)$$

nulový bod:

$$e^{\sqrt{x}/n} = n \tan \tfrac{1}{n}$$

$$\sqrt{x} = n \log (n \tan 1/n)$$

$$x_0 = n^2 \log^2 (n \tan 1/n)$$

? $x_0 \overset{?}{\in} [0, \varepsilon]$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_0} = \lim_{n\to\infty} n \log (n \tan 1/n)$$

Heine $y_n = 1/n$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(\frac{1}{x}\tan x\right)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{\frac{\tan x}{x} - 1} \cdot \frac{\frac{\tan x}{x} - 1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan x - x}{x^2} = \lim \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^2} = 0$$

tedy od jist. n_0: $x_0 \in [0, b]$

$$(f_n - f)(x_0) = \underbrace{\left| \frac{n \tan 1/n - 1}{\tan 1/n} - n \log (n \tan 1/n) \right|}_{A_n}$$

krajní body:

$$|(f_n - f)(0)| = 0$$

$$|(f_n - f)(b)| = \left| \frac{e^{\frac{\sqrt{b}}{n}} - 1}{\tan 1/n} - \sqrt{b} \right|$$ pro $n \to \infty$ jde to 0 (víme z bod. konvergence)

$\lim_{n\to\infty} A_n$ Heine $y_n = 1/n$

$$\lim_{x\to 0+} \left| \frac{\frac{\tan x}{x} - 1}{\tan x} - \frac{\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x} \right| = 0$$

$\qquad 0 \qquad\qquad -0 \qquad$ LH nebo Taylor...

Závěr
$f_n \rightrightarrows f$ na $[0, b]$
$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $[0, \infty)$

$$f_n = \frac{\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$$

- bod. lim $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{x^2}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{3} = 1\cdot x^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$x=0 \quad \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

Tedy $f = \frac{2}{3}x^2$

- st. konv.

$$\tau_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{2x^2}{3} \right|$$

krajní body

$$\lim_{x\to\infty} \left| x^2 \left(\underbrace{\frac{1}{x^2} \frac{\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}}_{\to 0 \text{ škála}} - \frac{2}{3} \right) \right| = \infty$$

tedy $\lim_{n\to\infty} \tau_n \neq 0 \implies f_n \not\rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$

- lok. st. konv. Uvažujme interval $[-b,b]$, kde $b>0$

Hledáme $\sup_{x\in[-b,b]} |f_n - f|$

derivace $(f_n - f)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{4}{3}x$

$$= \frac{2x}{\sqrt{n}+x^2} \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{3} - \frac{4}{3}x = \frac{2}{3}x\left(\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}-2\sqrt{n}-2x^2}{\sqrt{n}+x^2}\right)$$

Nulové body: $x = 0$

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n} - 2x^2 = 0$$

$$\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{2} = x^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}} = x_0$$

$$(f_n - f)(x_0) = \frac{\log\left(1 + \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n - f)(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right)}{\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

$$= 1 \cdot 0 - 0 = 0$$

Krajní body

$\lim_{n\to\infty} |f_n - f|(\pm b) = 0$ (z bod. konvergence)

Dohromady $\lim \Gamma_n = 0$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[-b, b]$

a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$

Bonus

Věta 1. Nechť (a,b) je **omezený** interval, $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$. Nechť

(a) f_n mají vlastní derivaci na (a,b),

(b) existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,

(c) $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a,b).

Pak existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), f má vlastní derivaci na (a,b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a,b).

3. Nechť $f_n = \frac{1}{n}\arctan(x^n)$ na $(0,\infty)$. Ukažte, že f_n konverguje stejnoměrně k jisté f, ale není pravda, že $f_n' \rightrightarrows f'$.
Řešení:

- Stejnoměrná konvergence funkcí f_n: Bodová konvergence: Zafixujme $x \in (0,\infty)$. Pak z omezené a mizející máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\arctan(x^n) = 0.$$

Tedy, $f = 0$ pro $x \in (0,\infty)$.
Stejnoměrná konvergence funkcí f_n: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0,\infty)\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|\frac{1}{n}\arctan(x^n)\right| \leq \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $(0,\infty)$.

- Stejnoměrná konvergence funkcí f_n': Máme

$$f_n' = \frac{1}{n}\cdot\frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

Bodová konvergence: Zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak pro $x \in (0,1)$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \overset{AL}{=} \frac{0}{1+0} = 0.$$

Pro $x = 1$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}$$

Pro $x \in (1,\infty)$ je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^{n-1}}+x^{n+1}} \overset{AL}{=} \frac{1}{0+\infty} = 0.$$

Dohromady

$$f' = \begin{cases} 0, & x \in (0,1), \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Protože f_n' jsou spojité a f' nikoli, funkce nemohokou konvergovat stejnoměrně. Tedy

$$f_n' \not\rightrightarrows f'.$$

na $(0,\infty)$.

4. Nechť $f_n = \sin\frac{x}{n^2}$. Najděte bodovou limitu, ověřte (lokálně) stejnoměrnou konvergenci. Najděte derivace a ověřte předpoklady Věty o derivacích. Ukažte, že závěry věty platí.
Řešení:
   - Stejnoměrná konvergence funkcí f_n: Bodová konvergence: Zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak

     $$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n^2} = 0$$

     Tedy, $f = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$.
     Lokálně stejnoměrná konvergence funkcí f_n: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a interval $[a,b]$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Hledejme

     $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [a,b]\}.$$

     Odhadujeme tedy výraz

     $$\left|\sin\frac{x}{n^2}\right|$$

     Funkce $\left|\sin\frac{x}{n^2}\right|$ nabývá extrémů v bodech

     $$\frac{x}{n^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$
     $$x = n^2\frac{\pi}{2} + n^2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

     Od jistého n_0 tyto body neleží v intervalu $[a,b]$. Tedy suprema se bude nabývat v kraních bodech.

     $$\sigma_n = \max\left\{\left|\sin\frac{a}{n^2}\right|, \left|\sin\frac{b}{n^2}\right|\right\}$$

     Dále máme

     $$\lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{a}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sin\frac{b}{n^2}\right| = 0.$$

     Tedy

     $$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0.$$

     Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

     $$f_n \rightrightarrows f \text{ na } [a,b]$$

     a

     $$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } \mathbb{R}.$$

- Stejnoměrná konvergence funkcí f_n': Máme

$$f_n' = \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2}$$

Bodová konvergence: Zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak z omezené a mizející máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} = 0.$$

Stejnoměrná konvergence funkcí f_n': Hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left| \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$$

Tedy

$$f_n' \rightrightarrows f'.$$

na $\mathbb{R}$.

- Aplikace přes větu:
  - f_n mají vlastní derivaci na $\mathbb{R}$ - ano, našli jsme.
  - Zvolme $x_0 = 0$. Pak $f_n(0) = 0$ konverguje k 0.
  - f_n' konvergují stejnoměrně na $\mathbb{R}$ - ukázali jsme.
  - Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Věta 2. Nechť (a, b) je **omezený** interval, $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ a $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

5. Nechť f_n je definována takto: $f_n(0) = \frac{1}{n}$, mimo interval $[-n, n]$ je konstantně nulová a na intervalu $[-n, n]$ je dodefinována lineárně. Načrtněte první 3 funkce (vyjdou takové špičaté kopečky). Ověřte, zda $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ nebo ne. Pak ověřte předpoklady věty nebo najděte předpoklad, který není splněný.
Řešení:

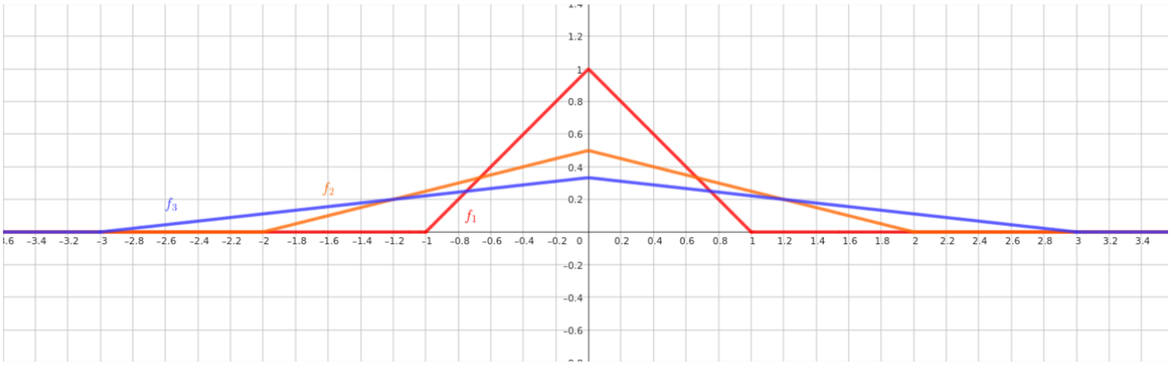
- Bodová limita: Zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Protože pro každé f_n platí

$$f_n \leq \frac{1}{n},$$

tak

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy $f = 0$.



- Máme
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$
- Dohromady
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \,\mathrm{d}x = 0.$$
- Zjevně není splněn předpoklad na omezenost intervalu.