



20. cvičení – Aplikace určitého integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Integrální kritérium). Nechť f je **nezáporná nerostoucí spojitá** funkce na $[n_0, \infty)$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$.

Věta 2 (Objem a povrch rotačního tělesa). Nechť f je **spojitá a nezáporná** na intervalu $[a, b]$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

(= Rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, kolem osy x .) Pak objem T je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Nechť má f navíc spojitou derivaci $f'(x)$ na $[a, b]$. Pak povrch pláště T je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Definice 3. *Křivkou* budeme rozumět spojitě zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. *Křivkou třídy $\mathcal{C}^1$* rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takovou, že φ'_i je spojitě na $[a, b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi'_i(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Věta 4 (Délka oblouku křivky). Nechť má funkce f spojitou derivaci f' na intervalu $[a, b]$. Pak délka této křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka třídy $\mathcal{C}^1$. Pak

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} dt$$

Příklady

- Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.
 - Určete obsah útvaru, který je dán nerovnostmi: $y \leq 2^x$, $y \geq x$, $x \geq -2$, $x \leq 1$.
 - Určete obsah útvaru, který je dán nerovnostmi: $y \leq \sqrt{x}$, $y \geq x^2$.
 - Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $0 \leq y \leq 2$, $x \geq 0$, $x \leq 4$ kolem osy x .
- Spočtěte
 - ✱ Určete délku grafu funkce $y = \log x$ pro $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$.
 - Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $y = 4 + x$, $x \in [-4, 2]$, kolem osy x .
 - Určete objem koule o poloměru $r > 0$.
 - Určete objem kužele s poloměrem podstavy r a výškou v .
 - Spočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in [0, 1]$ kolem osy y .
- Spočtěte
 - ✱ Určete délku grafu semikubické paraboly $y^2 = x^3$ pro $x \in [0, 1]$.
 - ♥ Určete obsah plochy dané nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 2$ a $y \geq x^2$.
 - ✱ Určete obsah plochy elipsy s poloosami a a b .
 - Určete délku grafu řetězovky $y = a \cosh \frac{x}{a}$ pro $x \in [-1, 1]$, kde $a > 0$ je parametr.
- Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o absolutní konvergenci řad

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{1+n^2}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$	(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\beta n}$, $\beta \geq 0$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

Zkouškové příklady

- (a) Spočtěte objem tělesa

$$T = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq \tan z, z \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \right\}.$$

- (b) Spočtěte objem tělesa

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq -5, y^2 + z^2 \leq x^2, y^2 + z^2 \leq 2 - x\}$$

- (c) Spočtěte délku křivky

$$y = \sqrt{x+1}, x \in [0, 1]$$

$z \sin v = x \text{ 'conit'sqns (cg)}$ $z \sin \sqrt{z} = x \text{ 'subst'ns (qg)}$	$(z \wedge - t) \vee (z \wedge t) : \text{kvly} \text{ v} \text{ (eg)}$ $z^x + 1 \wedge = x \text{ 'subst'ns (eg)}$
--	---