

18. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu - BC podmínka

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Bolzano-Cauchyova podmínka). Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a, b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí $\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon$.

Věta 2 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Nechť $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Dále necht' $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

- (A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.
- (D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 3 (limitní srovnávací kritérium). Nechť $-\infty \leq a < b < \infty$. Nechť f, g jsou **spojité** a necht' g je **kladná** na $(a, b]$.

1. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b f$ diverguje, pak také $\int_a^b g$ diverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ diverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b f$ konverguje, pak také $\int_a^b g$ konverguje.

Věta 4 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ a necht' $a < b$. Nechť funkce $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$. Necht' dále je f **spojitá** na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

1. Zformulujte Bolzano-Cauchyovu podmínku pomocí negace (integrál diverguje právě tehdy, když...). Srovnajte s řešením na 2. straně zadání.
2. Ukažte divergenci pomocí B-C podmínky.

(a) $\int_1^{\infty} x^{\alpha} \ln(1+x) |\cos x| dx$, $\alpha \geq 0$. (b) $\int_0^1 x^{\alpha} \arctan x \cos \frac{1}{x} dx$, $\alpha \leq -3$.

3. Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, $a \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in (0, \infty)$.

(a) $\int_0^{+\infty} \sin x^{\alpha} dx$

(b) $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^{\alpha} 2x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x dx$

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^{\alpha}} dx$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x^2} - 1} \sin \frac{1}{x^2} dx$ AK

(f) $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1} \ln(1+x)} x^{\alpha} dx$

$$(g) * \int_0^1 \arcsin^a(x(1-x)) \sin \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$(h) \otimes \int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x dx$$

Zkouškové příklady

4. Vyšetřete konvergenci integrálů (nemusí být absolutní)

$$(a) \int_0^1 \ln(\arctan x) \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x} - 1)^\alpha} dx,$$

$$(c) \int_1^\infty \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx$$

$$(b) \int_0^\infty \arcsin \frac{1}{x} \cos(x^2) \ln x dx$$

$$(d) \int_0^1 \frac{\ln(1-x) \sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)} dx$$

Bonus

5. Necht' $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

- (a) $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje (c) $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje (e) $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje
 (b) $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje (d) $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje

Věta 5 (Srovnávací kritérium dle I. Černého). Necht' $-\infty < a < b \leq \infty$. Necht' funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$. Necht' funkce g je definovaná na $[a, b]$, $\int_a^b g$ konverguje a $|f| \leq g$ na (a, b) . Pak konvergují i integrály $\int_a^b f$, $\int_a^b |f|$.

6. Necht' f je spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu (a, b) . Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

(Negací k $\int_a^b f$ konverguje je výrok $\int_a^b f = \pm\infty$ nebo $\int_a^b f$ neexistuje.)

- (a) $\int_a^b f$ konverguje. (c) $\int_a^b |f|$ konverguje.
 (b) $\int_a^b f^2$ konverguje. (d) f je definovaná a spojitá dokonce na $[a, b]$.

$$*(6ac) \otimes (6bc)$$

Věta 6 (Bolzano-Cauchyova podmínka). Necht' funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak integrál $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ že pro každé $b' \in (a, b)$ existují dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ a $\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \geq \varepsilon$.

(3h) (arcsin x)/ x je monotónní $\leftarrow$ řešení
 (6ac) uměl byste to na neomezeném (a, b) ?
 (6bc) $|f| \leq \max_{x \in I} |f|$

(3a) substituce $t = x^\alpha$
 (3c) substituce $t = e^x$
 (3g) $2 \sin x \sin x^2 = x^2 \cos x - x \cos 3x$
 (3e) substituce $t = \arcsin x$ je monotónní $\leftarrow$ řešení