



18. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu - BC podmínka

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Zformulujte Bolzano-Cauchyovu podmínku pomocí negace (integrál diverguje právě tehdy, když...).

Řešení: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $b' \in (a, b)$ existují dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ a

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \geq \varepsilon.$$

2. Ukažte divergenci pomocí B-C podmínky.

(a) $\int_1^\infty x^\alpha \ln(1+x) |\cos x| dx, \alpha \geq 0.$ (b) $\int_0^1 x^\alpha \arctan x \cos \frac{1}{x} dx, \alpha \leq -3.$

2a

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} \ln(1+x) |\cos x| dx \quad \alpha \geq 0$$

lim: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha} \ln(1+x) = \infty$, $\forall x \in [1, \infty) \quad x^{\alpha} \ln(x+1) \geq \ln 2$



Zusatzintervall $(\frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{3\pi}{2} + 2\pi)$:

$$\int_{\frac{\pi}{2} + 2\pi}^{\frac{3\pi}{2} + 2\pi} |x^{\alpha} \ln(1+x) \cos x| \geq \int_{\frac{\pi}{2} + 2\pi}^{\frac{3\pi}{2} + 2\pi} \ln 2 |\cos x| = \underline{2 \cdot \ln 2}$$

Necht $\varepsilon = \ln 2$. Pro $b' > 1$ magdenn ε : $\frac{\pi}{2} + 2\pi > b'$,
 $x_1 \nearrow x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi$

Par $\int_{x_1}^{x_2} f = 2 \ln 2 \geq \ln 2$, tedy $\int$ nesplňuje BC-podm.

2b

$$\int_0^1 x^\alpha \arctan x \cos \frac{1}{x} dx \quad \alpha \leq -3$$

lim: $\int$ spg' ne $(0,1]$, problem u 0

lze pepsat jako $\int_0^1 x^{\alpha+2} \arctan x \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\alpha+2} \arctan x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arctan x}{x}, x^{\alpha+3} = \begin{cases} 1 & \alpha = -3 \\ \infty & \alpha < -3 \end{cases}$$

tedy pro jisté x_0 : $x^{\alpha+2} \arctan x > \frac{1}{2} \quad x \in (0, x_0)$

$$\int_{(\frac{5\pi}{2} + 22\pi)^{-1}}^{(\frac{3\pi}{2} + 22\pi)^{-1}} x^{\alpha+2} \arctan x \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx > \frac{1}{2} \int_{(\frac{5\pi}{2} + 22\pi)^{-1}}^{(\frac{3\pi}{2} + 22\pi)^{-1}} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

od jistého $\frac{1}{2}$

$$\left[-\sin \frac{1}{x} \right]_{(\frac{5\pi}{2})^{-1}}^{(\frac{3\pi}{2})^{-1}} = \left(\sin \frac{3\pi}{2} \right) - \left(-\sin \frac{5\pi}{2} \right) = +1 + 1 = 2$$

Existuje $\varepsilon = \frac{1}{42}$ pro b' najde me k tak, že $(\frac{3\pi}{2} + 22\pi)^{-1} < b'$
 $\& \quad (\frac{5\pi}{2} + 22\pi)^{-1} < x_0$

Paž $\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| > 1 > \varepsilon$.

tedy nesplňuje Bc - podm.

3. Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, jestliže $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$.

(a) $\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx$

Řešení:

Proveďme substituci $t = x^\alpha$:

$$x = t^{1/\alpha}, \quad dx = \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha-1} dt$$

a platí, že

$$\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\alpha t^{1-1/\alpha}} dt$$

Na pravém okolí nuly $t \in (0, \pi/2)$ je integrand kladný a můžeme zde použít srovnání s funkcí

$$\frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} \approx \frac{t}{t^{1-1/\alpha}} = \frac{1}{t^{-1/\alpha}},$$

tudíž integrál $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} dt$ konverguje, a to navíc absolutně, právě když $-1/\alpha < 1$, tedy pokud $\alpha > -1$. Jinak diverguje. Obojí plyne z limitního srovnávacího kritéria. Pro kladné α tedy v okolí nuly není s konvergencí problém.

Zbývá tak vyšetřit integrál

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} dt$$

O tomto integrálu víme, že konverguje absolutně, právě když $1 - 1/\alpha > 1$, tedy dohromady s prvním případem pokud $-1 < \alpha < 0$.

Víme také, že konverguje neabsolutně, pokud $2 > 1 - 1/\alpha > 0$, tedy pokud $\alpha > 1$. Odtud máme, že absolutní konvergence integrálu v zadání příkladu nenastává pro žádné $\alpha > 0$ a že integrál konverguje neabsolutně pro $\alpha > 1$.

(b) $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^\alpha 2x} dx$

Řešení:

Srovnáním s funkcí $|\cos(\pi x)|/x$ na okolí nekonečna dostaneme, že absolutně integrál nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

Neabsolutně konverguje na $[1, +\infty)$ podle Dirichletova kritéria, neboť $\cos(\pi x)$ má omezenou primitivní funkci $|\frac{1}{\pi} \sin(\pi x)| \leq 1$ a $1/\ln^\alpha 2x \rightarrow 0$ monotónně pro každé $\alpha > 0$.

Na okolí $1/2$ použijme odhady

$$\cos(\pi x) = \sin(\pi x - \pi/2) \approx (\pi x - \pi/2) = \pi \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\ln(2x) = \ln(1 + (2x - 1)) \approx (2x - 1) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

a tudíž

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2^\alpha} \left(x - \frac{1}{2} \right)^{1-\alpha}$$

odtud máme na absolutní i neabsolutní konvergenci (neboť integrand na $(1/2, 1]$ nemění znaménko) podmínku podle limitního srovnávacího kritéria, že $1 - \alpha > -1$, tudíž $\alpha < 2$.

Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha < 2$.

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x dx$$

Řešení:

Provedeme substituci $t = e^x$. Potom $x = \ln t$ a $dx = 1/t dt$, integrál tak přejde na tvar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

o němž je známo, že konverguje neabsolutně.

$$(d) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} dx$$

Řešení:

Na (dostatečně malém pravém prstencovém) okolí nuly integrand nemění znaménko a chová se přibližně jako

$$f(x) \approx \frac{2}{x^{\alpha-2}},$$

odkud dostáváme podmínku na konvergenci $\alpha - 2 < 1$, tedy $\alpha < 3$.

Na okolí nekonečna nejprve integrand přepíšeme do jiného tvaru pomocí identity

$$\sin x \sin 2x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}$$

Neabsolutní konvergence: Protože funkce $\cos x$ i $\cos 3x$ mají omezené primitivní funkce, dostaneme pomocí Dirichletova kritéria, že funkce u nekonečna neabsolutně konverguje pro všechna $\alpha > 0$.

Absolutní konvergence: Nejprve nechť $\alpha > 1$. Pak

$$\left| \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

Tedy ze srovnávacího kritéria funkce absolutně konverguje.

Nyní nechť $\alpha \in (0, 1]$. Odhadujeme zespodu:

$$\left| \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \right| = \frac{2 \sin^2 x |\cos x|}{x^\alpha} \geq \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(2x)}{x^\alpha} = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos(4x)}{x^\alpha}.$$

Ale $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ je divergentní pro $\alpha \in (0, 1]$, kdežto $\int_1^\infty \frac{\cos(4x)}{x^\alpha}$ je konvergentní (z Dirichleta).

Dohromady tedy $\int_1^\infty \frac{1}{4} \frac{1 - \cos(4x)}{x^\alpha}$ diverguje. A ze srovnávacího kritéria diverguje i původní integrál.

Závěr: Integrál konverguje pro $0 < \alpha < 3$, pro $1 < \alpha < 3$ navíc absolutně. Jinak diverguje.

$$(e) \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2} - 1} \sin \frac{1}{x^2} dx$$

Řešení:

Na $[1, +\infty)$ integrál konverguje absolutně srovnáním s $\frac{1}{e^x}$, neboť platí, že

$$\frac{f(x)}{1/e^x} = \frac{x^a}{e^x} \cdot \frac{e^{2x}}{e^{x^2} - 1} \cdot \sin \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

neboť všechny členy konvergují k nule pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.

Absolutní konvergence u 0: Na pravém δ -okolí nuly je (pro dost malé δ)

$$\frac{1}{e^{x^2} - 1} \approx \frac{1}{x^2}.$$

Uvažujme tedy nejprve integrál

$$\int_0^\delta x^{a-2} \sin \frac{1}{x^2} dx$$

Substitucí $t = \frac{1}{x^2}$ dostaneme ekvivalentní integrál

$$\int_{1/\delta^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{a+1}{2}}} dt$$

o kterém víme, že:

konverguje absolutně, pokud $(a+1)/2 > 1$, tedy pokud $a > 1$.

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} = 1$, máme na nějakém okolí 0 odhady

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} \leq 2.$$

Pro srovnávací kritérium pak máme

$$\left| \frac{1}{2} x^{a-2} \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq \left| \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} x^{a-2} \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq \left| 2 x^{a-2} \sin \frac{1}{x^2} \right|.$$

Tedy náš původní integrál u 0 konverguje absolutně, pokud $(a+1)/2 > 1$, tedy pokud $a > 1$.

Závěr: Integrál konverguje absolutně, pokud $a > 1$.

$$(f) \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1} \ln(1+x)} x^\alpha dx$$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\ln(1+x) \approx x, \quad x-1 \approx 1$$

a podle limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_0^\delta \frac{x^{\alpha+1/3-1}}{\ln x} dx$$

Tento integrál konverguje pro $\alpha - 2/3 > -1$, tedy pro $\alpha > -1/3$

U jedničky použijeme odhady

$$x \approx 1, \quad \ln(1+x) \approx \ln 2, \quad \ln x \approx x-1$$

a podle limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{1-\delta}^1 (x-1)^{2/3}$$

Tento integrál konverguje absolutně (funkce má do jedničky dokonce spojitě rozšíření).
Závěr: Integrál konverguje pro $\alpha > -1/3$, a to absolutně.

$$(g) \int_0^1 \arcsin^\alpha(x(1-x)) \sin \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Řešení:

U jedničky platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx (1-x), \quad \sin \frac{1}{x^\alpha} \approx \sin 1$$

Protože integrand na vhodném levém okolí jedničky nemění znaménko, stačí podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřovat (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_{1-\delta}^1 (1-x)^\alpha dx$$

pro vhodné malé kladné δ , což je ekvivalentní vyšetřování konvergence integrálu

$$\int_0^\delta y^\alpha dy$$

který dostaneme substitucí $y = 1 - x$. O něm víme, že konverguje pro $\alpha > -1$.

U nuly platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx x.$$

Dále, funkce $x(1-x)$ i $(1-x)$ jsou monotónní, jejich α -té mocniny taktéž.

Ukážeme, že i funkce $\frac{1}{x} \arcsin x$ je monotónní na nějakém pravém okolí nuly.

Dále uvažujme funkci $g(x) = \frac{\arcsin x}{x}$. Ta je rostoucí na $(0, 1)$:

$$\left(\frac{\arcsin(x)}{x} \right)' = \frac{x - \arcsin(x) \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

Pro čitatele substituujeme $x = \sin u$ (pracujeme na intervalu $u \in (0, \frac{\pi}{2})$):

$$\sin u - u \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sin u - u \cos u$$

Ale $\sin u - u \cos u \geq 0$ protože

$$\sin u \geq u \cos u$$

$$\frac{\sin u}{\cos u} \geq u,$$

což je pravda.

Díky monotoniím pak stačí dle limitního srovnávacího kritéria a dle Abelova kritéria vyšetřovat absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\varepsilon x^\alpha \sin \frac{1}{x^\alpha}$$

pro vhodné $\varepsilon > 0$. Zastituujeme $y = x^{-\alpha}$ na integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{\alpha} y^{-1-\frac{1}{\alpha}} y^{-\frac{\alpha}{\alpha}} \sin y \, dy = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} y^{-2-\frac{1}{\alpha}} \sin y \, dy.$$

Tento integrál absolutně konverguje pro $-2 - \frac{1}{\alpha} < -1$, tedy $\alpha > -1$. Jiné hodnoty α není potřeba vyšetřovat (kvůli konvergenci u 1).

Závěr: pro $\alpha > -1$ integrál konverguje, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

(h) $\int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \, dx$

Řešení:

Funkce má spojitě rozšíření do nuly, neboť

$$\arcsin x \approx x \implies \arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx x$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Problematický bod je tedy pouze nekonečno. Protože $\frac{x}{x^2+1} \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$, platí také na okolí nekonečna, že

$$\arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

Z odhadu platného pro $x > e$

$$\frac{|\cos x|}{x} \ln x \geq \frac{|\cos x|}{x}$$

vyplývá, že integrál nemůže konvergovat absolutně.

Původní integrál vyřešíme pomocí odhadu $\arcsin u \geq u$ pro $u > 0$. Dále máme pro $x > 1$ $x^2 + 1 < 2x^2$. Pak

$$\left| \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \right| \geq \left| \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \right| \geq \left| \frac{1}{2x} \ln x \cos x \right|.$$

Tedy absolutně integrál diverguje.

Pro neabsolutní konvergenci uvažujme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx.$$

Protože $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow +\infty$ a tato funkce je na nějakém okolí nekonečna monotónní, je integrál neabsolutně konvergentní podle Dirichletova kritéria, neboť funkce $\cos x$ má omezenou primitivní funkci.

K monotónii $\frac{\ln x}{x}$. Na intervalu $(0, +\infty)$ je tato funkce spojitá a má spojitou derivaci, která je pro $x > e$ záporná, jak dostáváme přímým výpočtem:

$$\left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

Dále vyšetřeme integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} x \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx.$$

Ten konverguje z Abela, protože $\frac{x^2}{1+x^2}$ je monotónní a omezená. Nakonec uvažujme integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arcsin \frac{x}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x^2}} \frac{x^2}{x^2+1} \frac{\ln x}{x} \cos x \, dx.$$

Konverguje z Abela, protože funkce $\frac{\arcsin \frac{x}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x^2}}$ je omezená (má limitu rovnu 1 nekonečnu) a monotónní. Platí, že složení dvou monotónních funkcí je také monotónní. Pro $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$ máme

$$\left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Tedy h je klesající pro $x > 1$.

Dále uvažujme funkci $g(t) = \frac{\arcsin t}{t}$. Ta je rostoucí na $(0, 1)$:

$$\left(\frac{\arcsin(t)}{t} \right)' = \frac{t - \arcsin(t) \sqrt{1-t^2}}{t^2 \sqrt{1-t^2}}$$

Pro čitatele substituujeme $t = \sin u$ (pracujeme na intervalu $u \in (0, \frac{\pi}{2})$):

$$\sin u - u \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sin u - u \cos u$$

Ale $\sin u - u \cos u \geq 0$ protože

$$\sin u \geq u \cos u$$

$$\frac{\sin u}{\cos u} \geq u,$$

což je pravda.

Dohromady $\frac{\arcsin \frac{x}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x^2}}$ je monotónní.

Závěr: integrál konverguje.

Zkouškové příklady

4. Vyšetřete konvergenci integrálů (nemusí být absolutní)

- | | |
|---|---|
| (a) $\int_0^1 \ln(\arctan x) \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(e^{1-x} - 1)^\alpha} \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ | (c) $\int_0^\infty \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} \, dx$ |
| (b) $\int_0^\infty \arcsin \frac{1}{x} \cos(x^2) \ln x \, dx$ | (d) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x) \sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)} \, dx$ |

24

$$\int_0^1 \ln(\arctan x) \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{(e^{1-x} - 1)^\alpha} dx \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. f spg: ~~na~~ $\Sigma \frac{1}{2}, 1)$ a $(0, \frac{3}{2}]$

u 1: $e^{1-x} - 1 \sim (1-x)$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arccos x \approx \sqrt{1-x}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow 1-} \underbrace{\ln(\arctan x)}_{\ln \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{(1-x)^\alpha}{(e^{1-x} - 1)^\alpha} = \ln \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1^\alpha \in (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\sqrt{1-x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1-} +2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 f \quad k \Leftrightarrow \int_0^1 g$$

$$\int_0^1 g = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha} dx = \int_0^1 y^{\frac{1}{2}-\alpha} dy \quad k \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\alpha > -1$$

$$y=1-x \quad dy=-1dx$$

$$\boxed{\frac{3}{2} > \alpha}$$

Zusatz: $\int_0^1 f \quad k \Leftrightarrow \frac{3}{2} > \alpha$
 $\frac{3}{2}$ pro $\alpha \geq \frac{3}{2}$ Div

u 0:

$$\ln(\operatorname{arctanh} x) \sim \ln x$$

$$g(x) = \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{arctanh} x)}{\ln x} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctanh} x}{(e^{1-x} - 1)^x} = 1 \cdot \frac{\pi/2}{(e^1 - 1)^x} \in (0, \infty)$$

$$\stackrel{L'H}{\lim_{x \rightarrow 0^+}} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctanh} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{arctanh} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1 \cdot 1$$

$$\int_0^{1/2} f \leq \Leftrightarrow \int_0^{1/2} \ln x \leq$$

$$\int_0^{1/2} \ln x = \left[x \ln x - x \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{tedy } \int_0^{1/2} f \leq \quad \forall x$$

$$\text{Záver: } \int_0^1 f \leq \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$$

$$\text{D } \alpha \geq \frac{3}{2}$$

215

NAB

$$\int_1^{\infty} \underbrace{\arcsin \frac{1}{x} \cos(x^2) \ln x}_{f(x)} dx$$

f spoj na $[1, \infty)$

$$u \infty: \int_1^{\infty} \arcsin \frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot \underbrace{\frac{1}{2x} 2x \cos(x^2)}_{\text{mal om PF (bože } |\sin x^2| \leq 1)} dx$$

$$\frac{\ln x}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \text{a je monotónny}$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} < 0 \quad \text{tedy klesá}$$

pro $x > e$

Dirichlet: $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{2x} \cdot 2x \cos(x^2) dx$ $\checkmark$

Abel: $\left| \arcsin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2}$

a je monot: $\frac{1}{x}$ je klesajúci pro $x > 0$

$\arcsin x$ je roztomý pro $x \in [-1, 1]$

složený monot. je monot.

Tedy $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{2x} \cdot 2x \cos x^2 \cdot \arcsin \frac{1}{x} dx$ $\checkmark$

(UAE)

$$\int_1^{\infty} \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-1)} dx + \int_2^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-1)} dx$$

LS1

$$u_1: f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-1)} \cos x = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}} = \cos 1 \in (0, \infty)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \cdot (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1) dx$$

$$LS2 \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \left[2\sqrt{x-1} \right]_1^2 = 2 = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g}{h} = \lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1 = 4 \in (0, \infty)$$

$$\text{tedy } \int_1^2 h(x) dx \Rightarrow \int_1^2 g(x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx$$

$$u_{\infty}: \int_2^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}} dx \quad \text{je Dirichlet } \cos x \text{ má na } \mathbb{R} \text{ PF (=true)}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}-1} dx \quad \text{je Abela}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}-1} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}-1} \text{ je monotónní}$$

$$\text{Závěr } \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

(linearity)

2nd

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x) \sqrt{x-x^2}}{\sin(\pi x^2)} dx$$

$$u 0: \ln(1-x) \approx x$$

$$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)} \approx \sqrt{x}$$

$$\sin(\pi x^2) \approx \pi x^2$$

LSE

$$g(x) = \frac{x \sqrt{x}}{\pi x^2} = \frac{1}{\pi \sqrt{x}} \quad \int_0^{1/2} \frac{1}{\pi \sqrt{x}} dx < \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|f|}{g} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{|\ln(1-x)| \sqrt{x} \sqrt{1-x}}{\sin(\pi x^2)}}{\frac{x \sqrt{x}}{\pi x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|\ln(1-x)| \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\pi x^2}{\sin(\pi x^2)} = 1 \in (0, \infty)$$

$$\int_0^{1/2} f dx < \infty \iff \int_0^{1/2} g dx < \infty \quad \text{tedy } \int_0^{1/2} f dx$$

$$u 1: \sin(\pi x^2) \approx (\pi - \pi x)$$

$$\sqrt{x-x^2} \approx \sqrt{1-x}$$

$$\ln(1-x) \approx \ln(1-x)$$

LSE

$$g(x) = \frac{\ln(1-x) \sqrt{1-x}}{\pi(1-x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{x} \pi(1-x)}{\sin(\pi x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\pi(1-x)}{\sin(\pi x^2)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-\pi}{\cos(\pi x^2) \pi \cdot 2x} = \frac{-1}{-1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$$

$$\int_{1/2}^1 f dx < \infty \iff \int_{1/2}^1 g dx$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x} \sqrt{1-x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{\ln y}{y} \sqrt{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/2} \ln y \cdot y^{-1/2} dy$$

$$y = 1-x$$

$$dy = -1 dx$$

$$\text{Závěr: } \left[\int_0^1 f dx \right]$$

AR $\neq$ bulky

Bonus

5. Necht $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje | (d) $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje |
| (b) $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje | (e) $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje |
| (c) $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje | |

Řešení:

- (a) konverguje, linearita integrálu
(b) diverguje

Pro spor předpokládejme, že $\int_a^b f_1 + g_2$ konverguje. Pak z linearit integrálu konverguje i $\int_a^b f_1 + g_2 - f_1 = \int_a^b g_2$, což je spor s předpoklady.

- (c) Může konvergovat i divergovat. Např. $\int_0^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \int_0^1 0$ konverguje. Oproti tomu $\int_0^1 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{x}$ diverguje.
(d) Může konvergovat i divergovat. Např. $\int_0^1 x \cdot x^2$ konverguje. Oproti tomu $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{1}{x}$ diverguje.
(e) Může konvergovat i divergovat. Např. $\int_0^1 0 \cdot \frac{1}{x} = \int_0^1 0$ konverguje. Oproti tomu $\int_0^1 1 \cdot \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{x}$ diverguje.

6. Necht f je spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu (a, b) . Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

(Negací k $\int_a^b f$ konverguje je výrok $\int_a^b f = \pm\infty$ nebo $\int_a^b f$ neexistuje.)

- | | |
|--------------------------------|---|
| (a) $\int_a^b f$ konverguje. | (c) $\int_a^b f $ konverguje. |
| (b) $\int_a^b f^2$ konverguje. | (d) f je definovaná a spojitá dokonce na $[a, b]$. |

Řešení:

- (a) $\not\rightarrow$ (b): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
 - (a) $\not\rightarrow$ (c): Protipříklad $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} dx$. Substitucí se převede na $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$, o němž víme, že konverguje, ale ne absolutně.
 - (c) $\rightarrow$ (a): Absolutní konvergence implikuje konvergenci (věta).
 - (b) $\rightarrow$ (c): Platí, že $|f| \leq \max\{1, f^2\}$. Ale $\int_a^b 1 < \infty$ a $\int_a^b f^2 < \infty$ také (předpoklad). Odtud (a ze srovnávacího kritéria) už $\int_a^b |f|$ konverguje.
- Z předchozího pak plyne:
- (b) $\rightarrow$ (a)
 - (d) $\rightarrow$ (a): Spojitá funkce na omezeném a uzavřeném intervalu je omezená. Integrál konverguje.
 - (d) $\rightarrow$ (c): Je-li f spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i $|f|$. A tedy integrál konverguje.

- (d) $\rightarrow$ (b): Je-li f spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i f^2 . A tedy integrál konverguje.

- (a) $\nrightarrow$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (c) $\nrightarrow$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (b) $\nrightarrow$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ na $(0, 1)$.