



## 16. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

**Věta 1** (konvergence Newtonova integrálu omezené spojitě funkce na omezeném intervalu). Necht'  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , a  $f$  je omezená spojitá funkce na  $(a, b)$ . Potom  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .

**Věta 2.** Necht'  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , a necht'  $f$  je **spojitá** funkce na  $[a, b]$ . Potom  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .

**Věta 3** (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht'  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  a necht'  $a < b$ . Necht' funkce  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  splňují  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [a, b)$ . Necht' dále je  $f$  **spojitá** na  $[a, b)$  a platí  $g \in \mathcal{N}(a, b)$ . Potom  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .

**Poznámka 4.** Platí následující obecnější verze srovnávacího kritéria. Necht'  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ ,  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $|f| \leq g$ ,  $f$  je spojitá na  $[a, b)$  a  $g \in \mathcal{N}(a, b)$ . Potom  $f \in \mathcal{N}(a, b)$ .

**Poznámka 5.** Necht'  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ ,  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $|f| \leq g$ ,  $f, g$  jsou spojitě na  $[a, b)$ . Pokud  $\int_a^b g$  konverguje, pak  $\int_a^b f$  konverguje též. (A tedy diverguje-li  $\int_a^b f$ , diverguje i  $\int_a^b g$ .)

**Důsledek 6** (Kalenda, Holcický, Metody řešení vybraných úloh z MA). Necht' je  $f$  spojitá na  $(a, b)$ . Pokud  $\int_a^b f$  konverguje absolutně, tak i konverguje.

**Věta 7** (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Necht'  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ , a  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojitě a nezáporné. Jestliže  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$ , pak  $f \in \mathcal{N}(a, b)$  právě tehdy, když  $g \in \mathcal{N}(a, b)$ .

**Věta 8** (limitní srovnávací kritérium 2). Necht'  $-\infty < a < b \leq \infty$ . Necht'  $f, g$  jsou **spojitě** a necht'  $g$  je **kladná** na  $[a, b)$ .

1. Jestliže  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$  je vlastní a  $\int_a^b g$  konverguje, pak také  $\int_a^b f$  konverguje.
2. Jestliže  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$  je vlastní a nenulová, pak  $\int_a^b f$  konverguje právě tehdy, když  $\int_a^b g$  konverguje.
3. Jestliže  $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$  je nevlastní a  $\int_a^b g$  diverguje, pak také  $\int_a^b f$  diverguje.

### Algoritmus

1. Možná je vhodné daný interval **roztrhnout** a vyšetřovat každý konec zvlášť.
2. Je funkce **spojitá na omezeném uzavřeném** intervalu? Lze ji **spojitě dodefinovat**?
3. Je možné integrál přímo **upočítat**? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
4. **SK** a **LSK**. (Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.)

## Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ( $\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$ ):

(a)  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

(g)  $\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x} dx$

(m)  $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$

(b)  $\int_0^\infty x^\alpha dx$

(h)  $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$

(n)  $\int_0^\infty (\pi - 2 \arctan x)^\alpha dx$

(c)  $\int_1^\infty \frac{dx}{(3-x)^\alpha}$

(i)  $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$

(o)  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx$

(d)  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$

(j)  $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q} dx$

(p)  $\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2+1} \ln^a x dx$

(e)  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$

(k)  $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$

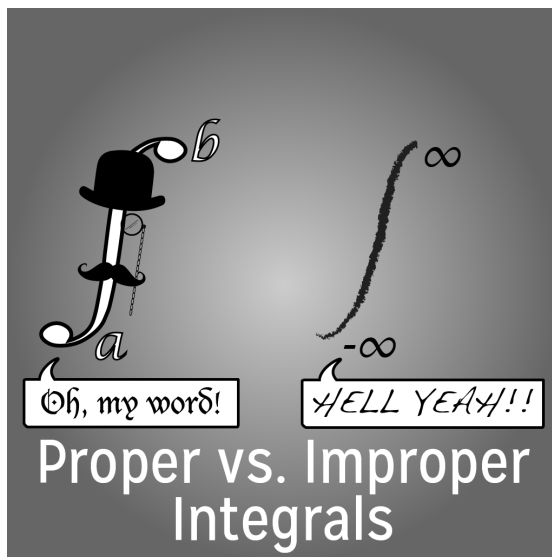
(q)  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4} dx$

(f)  $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3} dx$

(l)  $\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p} dx$

2. Nechť  $f$  je definována na intervalu  $(a, \infty)$ , je spojitá a  $f \geq 0$  na  $(a, \infty)$ . Nechť existuje limita  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A > 0$ . Ukažte, že pak  $\int_a^\infty f = \infty$ .

3. Nechť  $f \geq 0$ ,  $f \in \mathcal{N}(0, 1)$ . Dokažte, že pak i  $x^k f \in \mathcal{N}(0, 1)$  pro všechna  $k \in \mathbb{N}$ .



(1c) substituce  $y = 3 - x$   
 (1f)  $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$   
 (1j) uvažujte kombinace záporných i kladných  $p$  i  $q$ . Pro  
 představu položte např.  $p = \pm 3$  a  $q = \pm 2$   
 (1m) substituce  $y = \sqrt{x}$   
 (ln)  $\arccot x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$