



14. cvičení – Určitý integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

Řešení:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2.$$

(b) $\int_1^2 3x^2 + 2x + 1 \, dx$

Řešení:

$$\int_1^2 3x^2 + 2x + 1 \, dx = [x^3 + x^2 + x]_1^2 = (2^3 + 2^2 + 2^1) - (1^3 + 1^2 + 1^1) = 11,$$

(c) $\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \, dx$

Řešení:

$$\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \, dx = \left[2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = 2 \cdot 2 + \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - \frac{1}{2} - \left(2 \cdot 1 + \frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1}{1} \right) = \frac{11}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

(d) $\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x} \, dx$

Řešení:

$$\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x} \, dx = \left[2 \frac{\ln|3-4x|}{-4} \right]_{-5}^0 = -\frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 23)$$

(e) $\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \, dx$

Řešení:

$$\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \, dx = [-2\sqrt{2-x}]_{-7}^{-2} = -2(2-3) = 2.$$

(f) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$

Řešení:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = [\arctan x]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan x = \frac{\pi}{2} - 0.$$

(g) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} \, dx$

Řešení:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_2^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln x = \infty - \ln 2 = \infty.$$

Tedy integrál diverguje.

(h) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

Řešení:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = [e^x]_{-\infty}^0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 1 - 0 = 1.$$

(i) $\int_0^{\infty} e^x dx$

Řešení:

$$\int_0^{\infty} e^x dx = [e^x]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = \infty - 1 = \infty.$$

Tedy integrál diverguje.

(j) $\int_0^{\infty} \sin x dx$ **Řešení:**

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\cos x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\cos x)$$

Ježto první limita neexistuje, neexistuje ani Newtonův integrál $\int_0^{\infty} \sin x dx$.

2. (a) $\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$

Řešení: Substituce $y = x^3 + 1$, $dy = 3x^2 dx$, meze budou 2 a 9.

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \int_2^9 \frac{1}{y} dy = [\ln |y|]_2^9 = \ln 9 - \ln 2.$$

Máme $\varphi(x) = x^3 + 1$. Interval $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. Pak φ je spojitá na celém $[1, 2]$. Derivace $\varphi' = 3x^2$ je vlastní a spojitá na $[1, 2]$. Dále $\varphi(1) = 2$ a $\varphi(2) = 9$.

Jiná verze: Máme $\varphi(x) = x^3 + 1$. Interval $(\alpha, \beta) = (1, 2)$. Derivace $\varphi' = 3x^2$ je vlastní na $(1, 2)$. Dále $\varphi(1, 2) = (2, 9) = (a, b)$. Funkce φ je tam na a navíc tam má nenulovou derivaci $\varphi'(x) = 3x^2$. Integrál na pravé straně navíc existuje (spojitá funkce na uzavřeném intervalu).

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx$

Řešení:

Substituce $y = \sin x$, $dy = \cos x dx$, meze budou $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ a $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{8}.$$

(c) $\int_1^2 x \ln x dx$

Řešení: Per partes

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2x} dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

(d) $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$

Řešení: Dvkrát per partes

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = [-x^2 \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x \, dx = [-x^2 \cos x + 2x \sin x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \sin x \, dx =$$

$$[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

(e) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

Řešení: Substitute $y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x} dx$, meze 0 a 1.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx = \int_0^1 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(f) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$

Řešení:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \int_{-1}^1 1 + \frac{-1}{1+x^2} \, dx = [x - \arctan x]_{-1}^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

(g) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5} \, dx$

Řešení:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5} \, dx = \left[\frac{-1}{4(x+3)^4} \right]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{4(x+3)^4} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{4(x+3)^4} = \frac{1}{4 \cdot 81}$$

(h) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$

Řešení: Prve substitute $y = e^x$, $dy = e^x dx$,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} \, dx = \int_1^e \frac{1}{y^2+1} \, dy = [\arctan y]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = [\tan x]_0^1 = \tan 1.$$

Celkem

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \arctan e - \frac{\pi}{4} + \tan 1$$

(i) $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

Řešení: Substitute $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \int_1^\infty 2e^{-y} \, dy = 2[-e^{-y}]_1^\infty = -2(\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} - \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-y})$$

$$= -2\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}.$$

(j) $\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx$, $a < 0$, $b > 0$

Řešení: Integrál neexistuje, protože funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na daném intervalu (kolem nuly) primitivní funkci - není totiž darboxovská.

(k) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$

Řešení: Substituce $y = \arctan x$, $dy = \frac{1}{1+x^2} \, dx$:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}.$$

(l) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$

Řešení: Substituce $y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x} \, dx$,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{y} \, dy = [\ln y]_0^{\ln 2} = \lim_{y \rightarrow \ln 2^-} \ln y - \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = \ln(\ln 2) - (-\infty) = \infty.$$

Tedy integrál diverguje.

(m)

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \, dx$$

Řešení: Substituce $y = \cos x$, $dy = -\sin x \, dx$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \, dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+y^2} \, dy = [\arctan y]_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(n) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} \, dx$

Řešení: Dvakrát per partes:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} \, dx &= [-x^2 e^{-x}]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2x e^{-x} \, dx = [-x^2 e^{-x}]_{-1}^1 + [-2x e^{-x}]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x} \, dx \\ &= [-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}]_{-1}^1 = e - 5e^{-1} \end{aligned}$$

(o) $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x-1} \, dx$

Řešení:

$$\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x-1} \, dx = \int_2^3 x + \frac{1}{x-1} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| \right]_2^3 = \frac{9}{2} + \ln 2 - \left(\frac{4}{2} + \ln 1 \right) = \frac{5}{2} + \ln 2.$$

Bonus

3. Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x) \, dx,$$

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

jestliže hodnoty funkce f jsou

Návod: načrtněte funkci, která má hodnoty z tabulky. Pak ji zkuste obalit obdélníky seshora a vyplnit obdélníky zespod. Spočtěte jejich obsahy.

Horní odhad: 606

Dolní odhad: 480

4. PRAVDA – NEPRAVDA Necht' $(-a, a) \subseteq \mathbb{R}$.

ANO – NE Necht' f je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 0$

ANO – NE Necht' f je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$

Řešení: Pravda za předpokladu, že integrály existují vlastní. Jinak integrály nemusí existovat.

5. Najděte horní a dolní riemannovské součty pro Dirichletova funkci

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Řešení: $\int_a^b D(x) = 0$, $\int_a^{\bar{b}} D(x) = 1$