14. cvičení – Určitý integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (ne nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonotva integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 2. Nechť (a, b) je **omezený** interval a nechť f je **omezená spojitá** funkce na (a, b). Pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 3 (Vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $[a, b]$ je **omezený** interval a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 4. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je *darbouxovská*, jestliže pro každé $a, b \in M$, $a < b$, a pro každé $y \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$ existuje $c \in [a, b]$, takové, že $f(c) = y$.

Věta 5. Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f je darbouxovská.

Věta 6 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a, b]$. Pak

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Věta 7 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a φ má vlastní **nenulovou** derivaci na (α, β). Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Poznámka 8. Lze psát i takto:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y. = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$
   (b) $\displaystyle\int_1^2 3x^2+2x+1 \,\mathrm{d}x$
   (c) $\displaystyle\int_1^2 2+\sqrt{x}+\frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$
   (d) $\displaystyle\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x} \,\mathrm{d}x$
   (e) $\displaystyle\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \,\mathrm{d}x$
   (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
   (g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$
   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x \,\mathrm{d}x$
   (i) $\displaystyle\int_0^\infty e^x \,\mathrm{d}x$
   (j) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$

2. (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} \,\mathrm{d}x$
   (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$
   (c) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x$
   (d) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$
   (e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \,\mathrm{d}x$
   (f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
   (g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5}$
   (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}+\frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$
   (i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$
   (j) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x,\ a<0,\ b>0$
   (k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
   (l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$
   (m) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x+1} \,\mathrm{d}x$
   (n) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} \,\mathrm{d}x$
   (o) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x-1} \,\mathrm{d}x$

Bonus

3. ✻ Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu $\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže hodnoty funkce f jsou

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

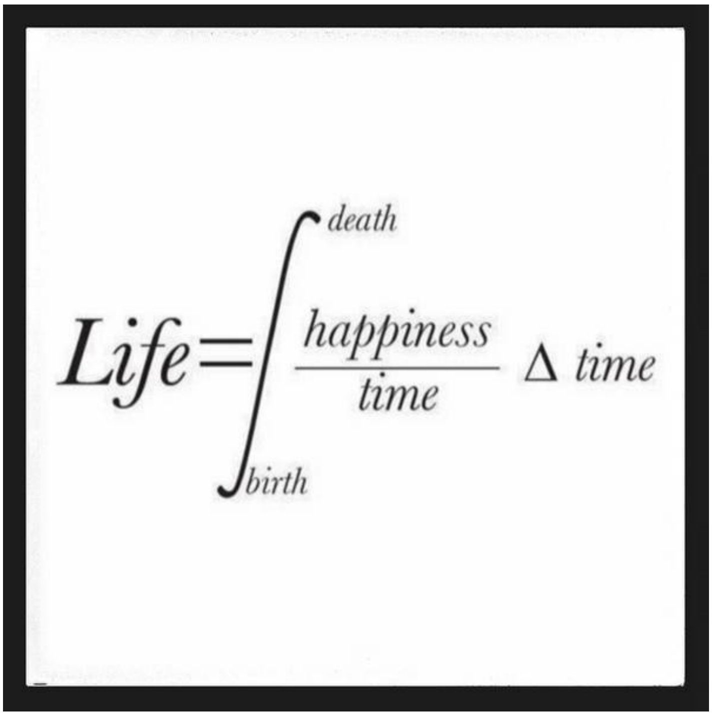
4. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť $(-a,a) \subseteq \mathbb{R}$.

ANO – NE Nechť f je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 0$

ANO – NE Nechť f je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$

5. Najděte horní a dolní riemannovské součty pro Dirichletovu funkci

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$



(3) Načrtněte funkci, která má hodnoty z tabulky. Pak ji zkuste obalit obdélníky seshora a vyplnit obdélníky zespod. Spočtěte jejich obsahy.