12. cvičení – Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Konverguje pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$?

   Řešení: Nikoli. Protipříklad: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje z Leibnize, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverguje.

2. Dokažte následující tvrzení: Řada reálných čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní právě tehdy, když pro každou omezenou posloupnost reálných čísel konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

   Řešení: " $\Rightarrow$ " Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje a nechť $\{b_n\}$ je omezená. Tedy existuje $M \geq 0$ takové, že $|b_n| \leq M$. Pak

   $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M|a_n| = M \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

   tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje absolutně, tedy konverguje.

   " $\Leftarrow$ " Uvažujme $b_n = \operatorname{sgn}(a_n)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy absolutně konvergentní.

3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.

   (a) Nechť $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ konverguje.
   Řešení: Tvrzení platí. Máme $|\sin t| \leq t$ pro $t \geq 0$. Tedy ze SK

   $$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(a_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

   (b) Nechť $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ konverguje. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Řešení: Neplatí. Uvažujme $a_n = 2\pi + \frac{1}{n^2}$. Pak $\sin(a_n) = \sin(2\pi + \frac{1}{n^2}) = \sin \frac{1}{n^2}$.
   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2})$ konverguje (LSK s $\frac{1}{n^2}$).
   Ale $\sum_{n=1}^{\infty} 2\pi + \frac{1}{n^2}$ diverguje (nesplňuje NP)..

   (c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ konverguje.
   Řešení: Neplatí. Položme $a_n = b_n c_n$, kde $b_n = \lfloor n/3 \rfloor^{-1/3}$ a $c_n = 1, 1, -2, 1, 1, -2, \ldots$
   Pak c_n má omezené částečné součty a $b_n \to 0$ monotónně. Tedy z Dirichletova kritéria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   Pro $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ budeme uvažovat součty po trojicích:

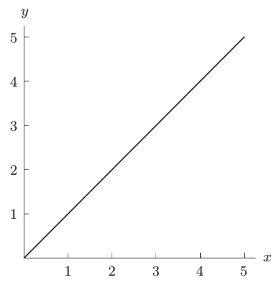
   $$\sin(n^{-1/3}) + \sin(n^{-1/3}) - \sin(2n^{-1/3}).$$

   Z Taylorova rozvoje máme

   $$\sin x + \sin x - \sin(2x) = x^3 - \frac{x^5}{4} + o(x^5)$$

Tedy naše součty po třech lze zapsat jako $\frac{1}{n} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{5/3}} + o(\frac{1}{n^{5/3}})$
Pro součty po třech pak dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}} + o(\frac{1}{n^{5/3}})$, což je součet divergentní a konvergentní řady. Tedy dohromady jde o divergentní řadu.
Tedy diverguje i původní $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$.

4. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



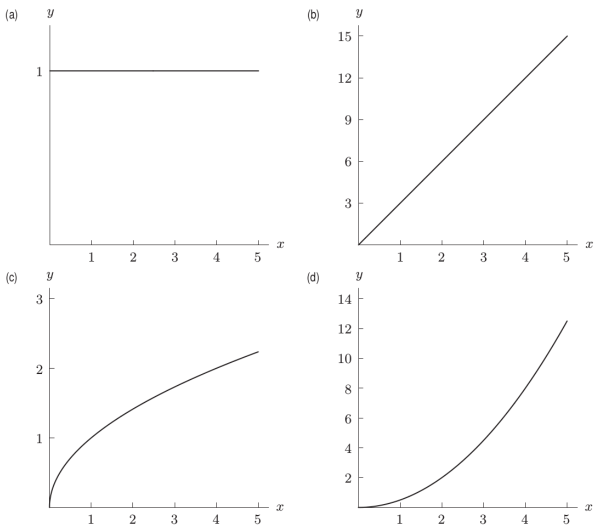
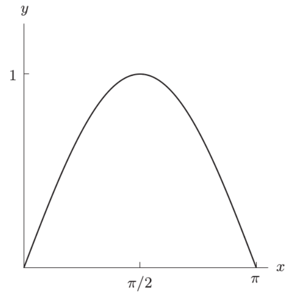


Figure 1: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

D, funkce na obrázku vpravo je $f(x) = x$. Její integrál je $x^2/2$, takže D.

5. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



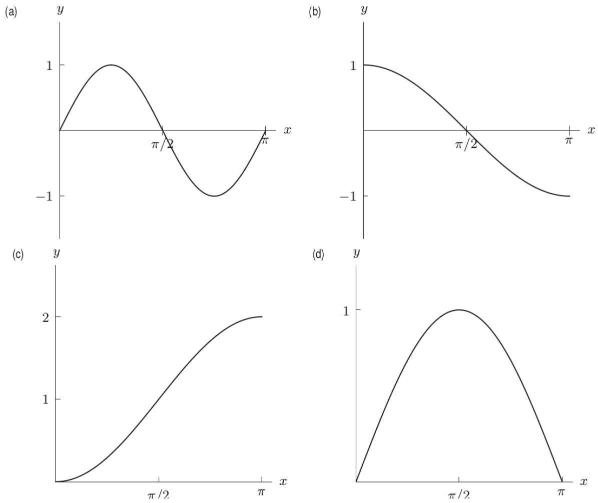
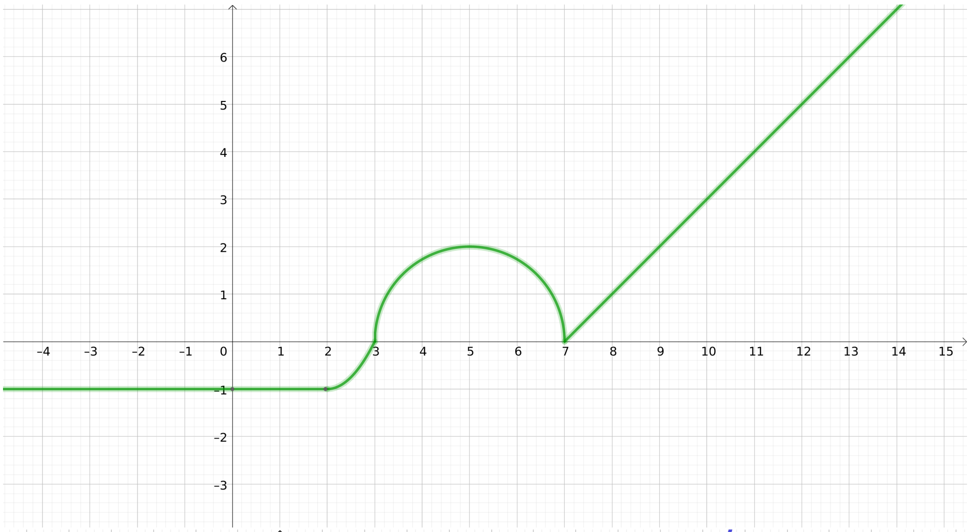
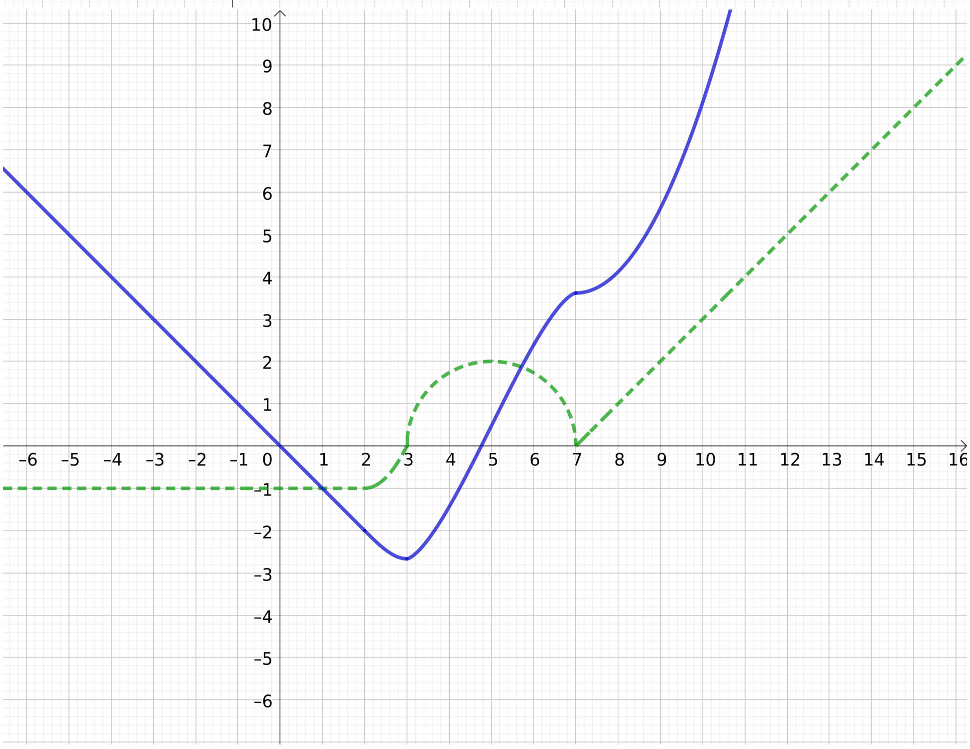


Figure 2: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

C, funkce vpravo (tedy derivace) je kladná, primitivní funkce tedy musí být rostoucí.

6. Na obrázku je funkce f. Načrtněte její primitivní funkci F, jestliže víte, že $F(0) = 0$. (Stačí náčrtek, není nutno hledat primitivní funkci ze vzorečků, jde spíš o grafickou podobu.)





7. Uvažujte následující integrál

$$\int \frac{1-x}{(x+1)^2} \,\mathrm{d}x.$$

Pokud aplikujete parciální zlomky, dostanete

$$\int \frac{1-x}{(x+1)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{-2}{x+1} - \log|x+1| + c.$$

Pokud ho řešíte pomocí per partes, vyjde

$$\int \frac{1-x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{x+1} - \log|x+1| + c.$$

Jak je to možné?

Řešení: Oba výsledky se liší o konstantu. Konkrétně

$$\frac{x-1}{x+1} - \log|x+1| + c = \frac{x+1-2}{x+1} - \log|x+1| + c = 1 + \frac{-2}{x+1} - \log|x+1| + c$$

Následující příklad i s řešením máme ze https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza_pro_studenty_2025-03-06.pdf

8. Definujme funkci $f:[0,1]\to[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \text{ kde } p, q \text{ jsou nesoudělné.} \end{cases}$$

Ukažte, že f nemá primitivní funkci na žádném intervalu $(a,b)\subset[0,1]$.

Řešení: Nechť $(a,b)\subset[0,1]$ je interval. Uvažujme racionální číslo $\frac{p}{q}\in(a,b)$, kde p,q jsou nesoudělná.

Pak funkce nenabývá žádných iracionálních hodnot v intervalu $(0,\frac{1}{q})$, a tedy nemá na (a,b) Darbouxovu vlastnost. Tedy nemá na (a,b) PF.