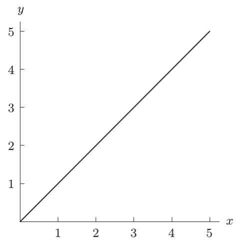
12. cvičení – Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Konverguje pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$?
2. ❀ Dokažte následující tvrzení: Řada reálných čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní právě tehdy, když pro každou omezenou posloupnost reálných čísel konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.
   (a)❄ Nechť $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ konverguje.
   (b)♣ Nechť $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ konverguje. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
   (c)*♡Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$ konverguje.
4. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



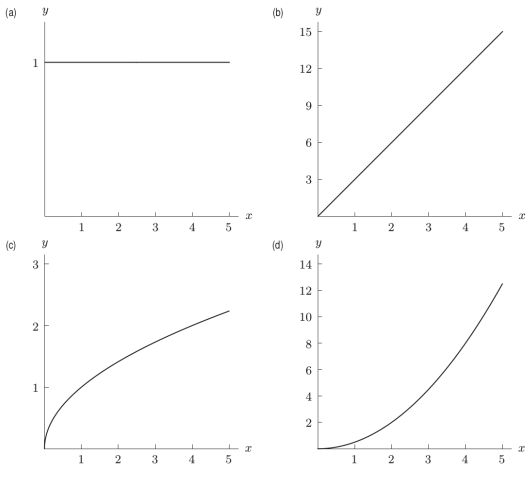
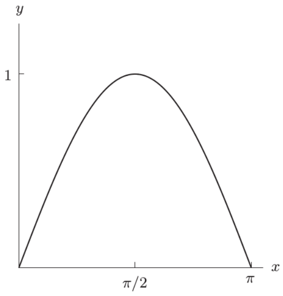


Figure 1: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

5. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



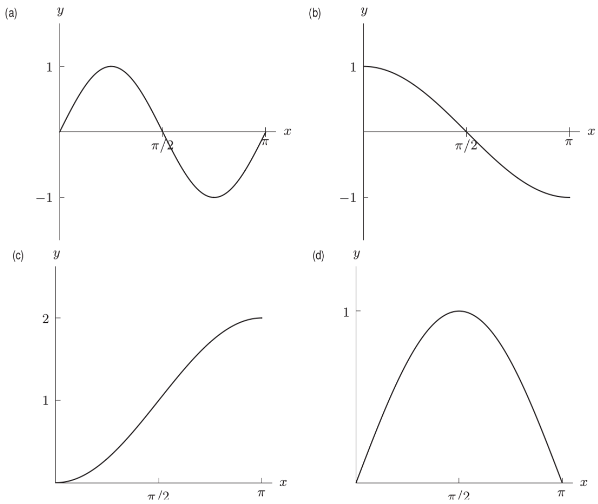
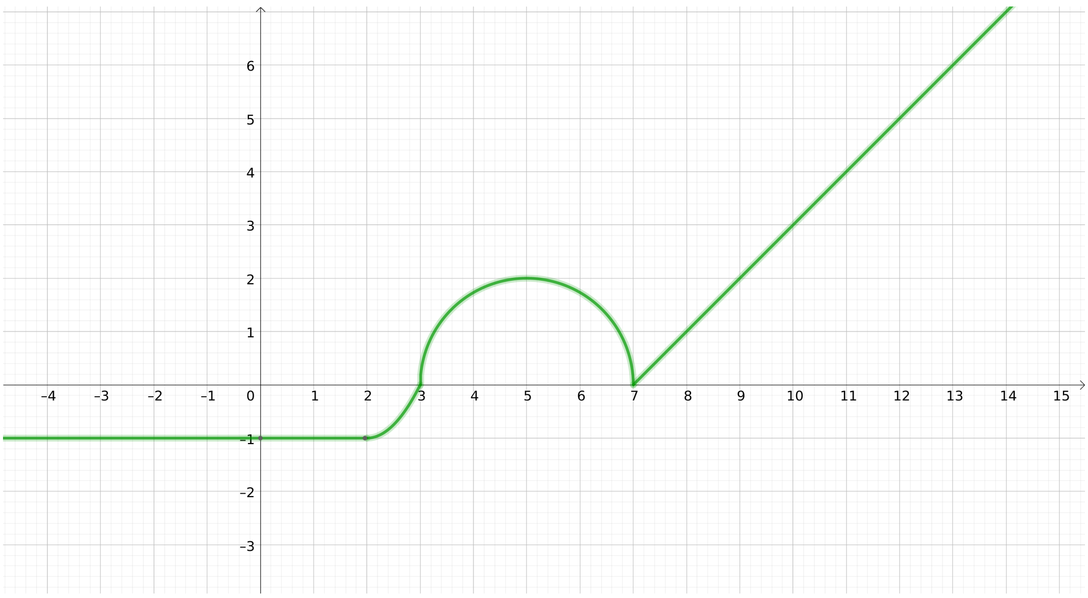


Figure 2: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

6. Na obrázku je funkce f. Načrtněte její primitivní funkci F, jestliže víte, že $F(0) = 0$. (Stačí náčrtek, není nutno hledat primitivní funkci ze vzorečků, jde spíš o grafickou podobu.)



7. Uvažujte následující integrál
$$\int \frac{1-x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$
Pokud aplikujete parciální zlomky, dostanete
$$\int \frac{1-x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{x+1} - \log|x+1| + c.$$
Pokud ho řešíte pomocí per partes, vyjde
$$\int \frac{1-x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{x+1} - \log|x+1| + c.$$
Jak je to možné?

8.★ Definujme funkci $f : [0,1] \to [0,1]$
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \text{ kde } p, q \text{ jsou nesoudělné.} \end{cases}$$
Ukažte, že f nemá primitivní funkci na žádném intervalu $(a,b) \subset [0,1]$.

(2) " $\Rightarrow$ " ukažte AK, použijte SK, " $\Leftarrow$ " co kdyby b_n pracovala se znaménkem a_n?
(3a) $|\sin t| < t$ pro $t \geq 0$
(3b) co když $a_n \to 2\pi$?
(3c) Položme $a_n = b_n c_n$, kde $b_n = \lfloor n/3 \rfloor^{-1/3}$ a $c_n = 1, 1, -2, 1, 1, -2, \ldots$. Pak sčítejte po 3 prvcích. Pro a_n z Dirichleta, pro $\sin(a_n)$ z Taylora.
(8) Darbouxova vlastnost