11. cvičení – Goniometrické substituce + lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. $g(x) = \dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$.

   Řešení:
   Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
   Použijeme substituci $t = \tan\frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{1}{3t^2+2t+2}$.
   Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
   Zasubstituujeme

   $$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{2}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3t+1}{\sqrt{5}}$$
   $$\to \int g(x) \overset{C}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}.$$

   $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$
   Tedy
   $$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c_k, \qquad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$
   V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:
   $$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)-} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c_k = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + c_k,$$
   $$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)+} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c_{k+1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + c_{k+1}.$$
   tedy
   $$c_{k+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + c_k.$$
   Odtud
   $$c_k = \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + c_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
   Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.
   Závěr:
   $$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + c_0, & x \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k) \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}} + c_0, & x = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

2. $g(x) = \dfrac{1}{2 - \sin x}$

   Řešení:
   Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
   Použijeme substituci $t = \tan\frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{1}{t^2-t+1}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
Zasubstituujeme

$$\int \frac{1}{2-\sin x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{2}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2-\frac{2t}{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$
$$\to \int g(x) \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$
Tedy

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + c_k, \qquad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)-} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + c_k = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k,$$
$$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)+} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + c_{k+1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}.$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}} + c_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.
Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

3. $g(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$
Řešení: Podmínky: $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Funkce g je spojitá na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan\frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{2}{(1+t)^2}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-1, \infty) \subseteq (a, b)$.
Intervaly podruhé: $(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (-\infty, -1)$. Navíc $\varphi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (-\infty, -1) \subseteq (\bar{a}, \bar{b})$.
Zasubstituujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} \to \int \frac{2}{t^2+1}\frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -2\frac{1}{t+1}$$
$$\to \int g(x) \overset{C}{=} -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}$$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$
Tedy

$$G(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + c_k, & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + d_k, & x \in (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi). \end{cases}$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)-} -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + c_k = 0 + c_k$$

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)+} -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + d_k = 0 + d_k$$

tedy

$$c_k = d_k$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, můžeme použít lemma o lepení.
Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + c_k, & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ c_k, & x = \pi + 2k\pi, \\ -2\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + c_k, & x \in (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi). \end{cases}$$

Pozn.: V bodech $-\pi/2 + 2k\pi$ nelepíme, původní funkce g tam není definovaná, tedy tam nemůže mít PF.

4. $g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$

Řešení:
Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^2}{(t^2+1)(2t^2+1)}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
Zasubstituujeme

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{1 + \frac{t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{2t^2+1}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}t$$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
Tedy

$$G(x) = \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + c_k, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+\pi k)-} \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + c_k = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2} + c_k$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+\pi k)+} \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + c_{k+1} = -\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2} + c_{k+1}.$$

tedy

$$c_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\pi + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)k\pi + c_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.
Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \arctan\tan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\tan x + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c_0, & x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + 2\pi) \\ \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k\pi\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c_0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

5. $g(x) = \dfrac{1}{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}$

Řešení:
Podmínky: $\cos x \neq \pm 1$, $x \neq 0 + k\pi$.
Funkce g je spojitá na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \cot x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = -\frac{1+t^2}{1+2t^2}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x \to \int &\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)}\frac{-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{1+t^2}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{C}{=} -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) \\ &\to \int g(x) \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\cot x) \end{aligned}$$

$x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$
Tedy

$$G(x) = -\frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\cot x) + c_k, \qquad x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$$

Funkce se při této substituci nelepí.

6. $g(x) = \dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$

Řešení: Zdroj příkladu: https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html
Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan\frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{2(1+t)^2}{(t^2+1)(t^2+3)}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstituujeme

$$\int \frac{1+\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(1+t)^2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{3+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{3+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + \log(1+t^2) - \log(3+t^2)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+t^2)}{(3+t^2)}$$
$$\to \int g(x) \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)}{(3+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)}$$

$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$
Tedy

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)}{(3+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)} + c_k, \qquad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)}{(3+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)} + c_k = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k,$$
$$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)}{(3+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)} + c_{k+1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}.$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}} + c_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.
Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)}{(3+(\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2)} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

7. $g(x) = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$
Řešení: Zdroj příkladu: https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html
Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)(t^2+4)}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a,b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a,b)$.
Zasubstituujeme

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{t^2-1}{(t^2+1)(t^2+4)}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{3}\frac{1}{4+t^2} - \frac{2}{3}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{C}{=} \frac{5}{6} \arctan \frac{t}{2} - \frac{2}{3} \arctan t$$
$$\to \int g(x) \overset{C}{=} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x)$$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
Tedy

$$G(x) = \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_k, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + \pi k)-} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_k = \frac{\pi}{12} + c_k$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + \pi k)+} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_{k+1} = -\frac{\pi}{12} + c_{k+1}$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{\pi}{6} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{\pi}{6} k + c_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.
Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_k, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} k + c_0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

8. $g(x) = \dfrac{1}{\sin x + 2}$
Řešení: Zdroj příkladu: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr
Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{1}{t^2 + t + 1}$
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
Zasubstituujeme

$$\int \frac{1}{\sin x + 2} \,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{t^2 + t + 1} \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\to \int g(x) \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$
Tedy

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c_k, \qquad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\lim_{x \to (\pi + 2\pi k)-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c_k = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k,$$

$$\lim_{x \to (\pi + 2\pi k)+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c_{k+1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}.$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}} + c_0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.
Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi\frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$