10. cvičení – Goniometrické substituce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Část příkladů máme odtud: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps10/sbirka2/m_analyza_v2/SPzMAI_v2.pdf

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. $g(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$
   Řešení: Podmínky: $\cos x \neq -1$, tedy $x \neq \pi + 2k\pi$. Funkce g je spojitá na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, má tam tedy PF.
   Použijeme substituci $t = \cos x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{-1}{1+t}$.
   Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-1, 1] \subseteq (a, b)$.
   Pak
   $$\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$$
   Zasubstituujeme
   $$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{-1}{1+t}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\log|1+t| \to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\log|1 + \cos x|$$
   $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$
2. $g(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$
   Řešení: Funkce g je spojitá na $\mathbb{R}$, má tam tedy PF.
   Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{1}{1+2t^2}$.
   Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
   Máme tedy
   $$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$
   Zasubstituujeme
   $$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2t^2} = \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}t)^2}$$
   $$\overset{C}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t) \to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x)$$
   $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
   V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.
3. $g(x) = \dfrac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$
   Řešení: Funkce g je spojitá na $\mathbb{R}$, má tam tedy PF.
   Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{3t^2+1}{t^2+3} \cdot \frac{1}{t^2+1}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
Máme tedy

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$

Zasubstituujeme

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx \to \int \frac{3t^2+1}{t^2+3} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Dále řešíme rozkladem na parciální zlomky. Ve zlomku

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}$$

formálně pišme y místo t^2.
Varování: tento trik slouží pouze k rozkladu na parciální zlomky, nelze s ním dále integrovat.
Pak podle věty o rozkladu na parciální zlomky máme, že

$$\frac{3y+1}{(y+3)(y+1)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+1}$$

$$3y + 1 = A(y+1) + B(y+3)$$

a dosazením $y = -1$ dostaneme, že $B = -1$, dosazením $y = -3$ dostaneme, že $A = 4$.
Platí tedy, že

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}$$

Nyní dokončíme integraci

$$\int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} - \arctan t$$

$$\to \int g(x) \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} - \arctan(\operatorname{tg} x)$$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

4. $g(x) = \dfrac{\cos^3 x}{2 - \sin x}$
Řešení: Funkce g je spojitá na $\mathbb{R}$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \sin x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{1-t^2}{2-t}$.
Intervaly: $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. $(a, b) = (-\infty, 2)$. Navíc $\varphi(\alpha, \beta) = [-1, 1] \subseteq (a, b)$. Máme $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.
Zasubstituujeme

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1-t^2}{2-t}\,\mathrm{d}t = \int 2 + t + \frac{3}{t-2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} 2t + \frac{t^2}{2} + 3\log|t-2|$$

$$\to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 2\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + 3\log|\sin x - 2|$$

$x \in (-\infty, \infty)$

5. $g(x) = \dfrac{1}{2-\cos x}$
Řešení: Funkce g je spojitá na $\mathbb{R}$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan\frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{2}{1+3t^2}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
Máme
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{2}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$
Zasubstituujeme
$$\int \frac{1}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+3t^2} = \int \frac{2}{1+(\sqrt{3}t)^2}$$
$$\stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}t) \to \int g(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2})$$
$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$,
V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

6. $g(x) = \dfrac{1}{\sin x}$
Řešení: Funkce g je spojitá na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \cos x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = -\frac{1}{1-t^2}$.
Intervaly: $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $(a, b) = (-1, 1)$. Navíc $\varphi(\alpha, \beta) = (-1, 1) \subseteq (a, b)$.
Máme $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.
Zasubstituujeme
$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{-1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}$$
$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| \to \int g(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\log|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\log|\cos x + 1|$$
$x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$

7. $g(x) = \dfrac{1}{\cos x \sin^3 x}$
Řešení: Podmínky: $\cos x \neq 0$, $\sin \neq 0$, tedy $x \neq k\frac{\pi}{2}$.
Funkce g je spojitá na $(0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2})$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^2+1}{t^3}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (0, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (0, \infty) \subseteq (a, b)$.
Máme tedy
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$
Zasubstituujeme
$$\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x \sin x \cdot \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{1}{\frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+1}{t^3}\,dt$$
$$\stackrel{C}{=} \log|t| - \frac{1}{2}t^2 \to \int g(x) \stackrel{C}{=} \log|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}$$

$x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
Nyní větu o substituci aplikujeme ještě jednou s intervaly: Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$, $(a,b) = (-\infty, 0)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, 0) \subseteq (a,b)$.
Závěr:

$$\int g(x) \stackrel{C}{=} \log|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}$$

$x \in (0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2})$
Poznámka:

$$\frac{1}{2\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} \stackrel{C}{=} \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}$$

8. $g(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$
Řešení: Podmínky: $\cos x \neq \sin \neq 0$, tedy $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.
Funkce g je spojitá na $(-\frac{3}{4}\pi + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t}{t-1} \cdot \frac{1}{1+t^2}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{3}{4}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a,b) = (1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (1, \infty) \subseteq (a,b)$.
Máme tedy

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x}{\tan x - 1}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{t}{t-1} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-t+1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{4}\log|t^2+1| + \frac{1}{2}\arctan t \\
&\to \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\log|\tan x - 1| - \frac{1}{4}\log|\tan^2 x + 1| + \frac{1}{2}\arctan(\tan x)
\end{aligned}$$

$x \in (-\frac{3}{4}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi)$
Nyní větu o substituci aplikujeme ještě jednou s intervaly: Intervaly: $(\bar{\alpha_k}, \bar{\beta_k}) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (-\infty, 1)$. Navíc $\varphi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (-\infty, 1) \subseteq (\bar{a}, \bar{b})$.
Závěr:

$$\int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\log|\tan x - 1| - \frac{1}{4}\log|\tan^2 x + 1| + \frac{1}{2}\arctan(\tan x)$$

$x \in (-\frac{3}{4}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi)$
$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$,
V bodech $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

9. $g(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$
Řešení: Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \cos x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+4}$.
Intervaly: $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ $(a,b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha, \beta) = [-1, 1] \subseteq (a,b)$. Máme $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{1+4\cos^2 x+3(1-\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x\\ &\to \int \frac{t^2-1}{1+4t^2+3(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \int 1-\frac{5}{t^2+4}\\ &\overset{C}{=} t-\frac{5}{2}\arctan\frac{t}{2}\\ &\to \int g(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \cos x - \frac{5}{2}\arctan\frac{\cos x}{2}\end{aligned}$$

$x \in (-\infty, \infty)$

10. $g(x) = \operatorname{tg}^5 x$
Podmínky: $\cos x \neq 0$, tedy $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
Funkce g je spojitá na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^5}{1+t^2}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $(a,b) = (-\infty,\infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k,\beta_k) = (-\infty,\infty) \subseteq (a,b)$.
Máme tedy

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x \to \int \frac{t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\\ \to \int g(x) \overset{C}{=} \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)\end{aligned}$$

$x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$

11. $g(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$
Řešení: Podmínky $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi$.
Funkce g je spojitá na $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan\frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}$.
Intervaly: $(\alpha_k,\beta_k) = (-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi)$, $(a,b) = (-1,\infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k,\beta_k) = (-1,\infty) \subseteq (a,b)$.
Máme

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{2}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx \to \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{4t}{(t^2+1)(t^2+2t+1)}\,dt\\ = \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}\,dt =\end{aligned}$$

Postupujeme rozkladem na parciální zlomky, který hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Odkud přenásobením vyplývá

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

Dosazením $t=-1$ dostaneme, že $B=-2$. Dosazením $t=i$ dostaneme

$$4i = (Ci+D)(1+i)^2 = (Ci+D)\cdot 2i$$

$$2 = Ci + D$$

odkud plyne, že $C=0$ a $D=2$. Zpětným dosazením dostaneme

$$4t = A(t+1)(t^2+1) - 2(t^2+1) + 2(t+1)^2$$

a porovnáním absolutním členů vidíme, že $0 = A - 2 + 2$, tedy, že $A = 0$. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t^2+1}$$

Dokončeme integraci.

$$\int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\int \frac{2}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} \frac{2}{t+1} + 2\arctan t$$
$$\to \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + 2\arctan(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$,
Nyní větu o substituci aplikujeme ještě jednou s intervaly: Intervaly: $(\bar{\alpha_k}, \bar{\beta_k}) = (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (-\infty, -1)$. Navíc $\varphi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (-\infty, -1) \subseteq (\bar{a}, \bar{b})$.
Závěr:

$$\int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + 2\arctan(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $x \in (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$.
V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

12. $g(x) = \dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$
Řešení:
Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.
Použijeme substituci $t = \tan\frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = 4\frac{t^2-t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}$.
Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a,b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.
Máme

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \frac{2}{1+t^2} = \mathrm{d}x$$

Zasubstituujeme

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \to \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^2-t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4+2t}{t^2+3} - \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{2t}{t^2+3} + \frac{4}{t^2+3} - \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \log|t^2+3| + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} - \log|t^2+1|$$
$$\to \int g(x) \overset{C}{=} \log|\tan^2\frac{x}{2}+3| + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \log|\tan^2\frac{x}{2}+1|$$

$x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$
V bodech $\pi+2k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

Bonus

13. Které/á z následujících tvrzení jsou pravdivá?
    (a) Jestliže $f'(x) = g'(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).
    (b) Jestliže $\int f(x) = \int g(x)$ (pro všechna x), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna x).

Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions/GQbysection_pdfversion.pdf
Řešení: "$\Rightarrow$" Předpokládejme, že f není stejnoměrně spojitá na intervalu I. Neboli

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in I,\ |x-y| < \delta : |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon.$$

Najděme tedy takové $\varepsilon > 0$ a zvolme $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$. Protože f není stejnoměrně spojitá, tak existuje $x = x_n$ a $y = y_n$ takové, že $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Zbývá ukázat, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$. Zvolme $\eta > 0$. Najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \eta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \eta.$$

"$\Leftarrow$"
Mějme takové $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Z definice limity pro každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_0$ je $|x_n - y_n| < \delta$.
Zvolme tedy $\delta > 0$ a položme $x = x_n$ a $y = y_n$. Pak máme $|x-y| < \delta$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
QED.

14. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a,b).
    NE Jestliže (a,b) je omezený a F je omezená, pak i f je omezená.
    Protipříklad: $F = \sqrt{x}$, $f = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0,1)$.
    NE Jestliže f je omezená a spojitá, pak i F je omezená.
    Protipříklad: $f = \frac{1}{x}$, $F = \ln x$ na $(1,\infty)$.

15. PRAVDA Nechť funkce f má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci, g je polynom. Pak k funkci fg existuje primitivní funkce na $\mathbb{R}$.
Řešení: Uvažujme polynom g stupně n.

- $n = 0$, tedy $g = a$, kde a je konstanta. Pak z linearity
$$\int af = aF.$$
- $n = 1$, tedy $g = ax + b$. Pak z per partes (polynom g i g' je spojitá funkce) máme
$$\int fg = Fg - \int Fg' = Fg - \int Fa.$$
Integrál na pravé straně existuje, protože Fa je spojitá funkce. (F jako primitivní funkce musí být spojitá.)
- Obecné n:
$$\int fg = Fg - \int Fg'$$
Integrál na pravé straně existuje, protože Fg' je spojitá funkce.

Definice 1. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, jestliže
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

16. Dokažte: Nechť I je interval, $f : I \to \mathbb{R}$. Pak f není stejnoměrně spojitá na I právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z I splňující $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Řešení: "$\Rightarrow$" Předpokládejme, že f není stejnoměrně spojitá na intervalu I. Neboli
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in I,\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$
Najděme tedy takové $\varepsilon > 0$ a zvolme $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$. Protože f není stejnoměrně spojitá, tak existuje $x = x_n$ a $y = y_n$ takové, že $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Zbývá ukázat, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$. Zvolme $\eta > 0$. Najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \eta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí
$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \eta.$$
"$\Leftarrow$"
Mějme takové $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Z definice limity pro každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_0$ je $|x_n - y_n| < \delta$.
Zvolme tedy $\delta > 0$ a položme $x = x_n$ a $y = y_n$. Pak máme $|x - y| < \delta$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
QED.