



9. cvičení – Parciální zlomky

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. (a) $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Řešení:

Budeme hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Přenosobením dostaneme vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

Dosaďme nyní postupně za $x = -1, -2, -3$. Obdržíme tak, že

$$-1 = 2A \implies A = -\frac{1}{2}$$

$$-2 = -B \implies B = 2$$

$$-3 = 2C \implies C = -\frac{3}{2}$$

Odtud tedy vyplývá, že

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \int \frac{-1}{2} \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{-3}{2} \frac{1}{x+3} dx \stackrel{C}{=} \frac{C}{2}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right|$$

$x \in (-\infty, -3), (-3, -2), (-2, -1), (-1, \infty)$.

(b) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$

Řešení:

Platí, že $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, přičemž druhý člen již nemá reálné kořeny.

Rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

dosažením $x = 1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Zpětným dosažením a roznásobením dostaneme, že

$$x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

odkud vyplývá, že $C = \frac{1}{3}$ (absolutní členy) a $B = -\frac{1}{3}$ (koeficienty u x^2). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odtud vyplývá:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, 1), (1, \infty)$.

(c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$

Řešení:

Mohli bychom provést dělení, k nalezení prvního kroku rozkladu ale vede snazší cesta

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{(x^3 - 5x^2 + 6x) + 5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} =$$

Nyní už máme na pravé straně podíl polynomů, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, a můžeme tedy použít standardní algoritmus. Nejprve rozložíme jmenovatel na kořenové činitele a poté hledáme rozklad ve tvaru

$$= 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x - 2)(x - 3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme rovnici

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x - 2)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x - 2)$$

Postupným dosazením $x = 0$, $x = 2$ a $x = 3$ dostaneme, že

$$1 = 6A \implies A = \frac{1}{6}$$

$$9 = -2B \implies B = -\frac{9}{2}$$

$$45 - 18 + 1 = 3C \implies C = \frac{28}{3}$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \right) dx \stackrel{C}{=} x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x - 2| + \frac{28}{3} \ln|x - 3|$$

$x \in (-\infty, 0), (0, 2), (2, 3), (3, \infty)$.

$$(d) f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

Řešení:

Platí, že

$$\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{(x^4 + 5x^2 + 4) - 5x^2 - 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A + Bx}{x^2 + 1} + \frac{C + Dx}{x^2 + 4}$$

zde ale postačí hledat jej ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{C}{x^2 + 4}$$

Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno x v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto x^2 budeme psát t .

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{C}{t + 4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za t lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů A, B . Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t + 4 = A(t + 4) + C(t + 1)$$

Dosazením $t = -4$ a $t = -1$ dostaneme, že¹

$$-16 = -3C \implies C = \frac{16}{3}$$

$$-1 = 3A \implies A = -\frac{1}{3}$$

Odtud tedy máme, že

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{t + 1} + \frac{16}{3} \frac{1}{t + 4}$$

a tedy

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{16}{3} \frac{1}{x^2 + 4}$$

Nyní už můžeme provést integraci.

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \int \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{(x/2)^2 + 1} \right) dx \stackrel{C}{=}$$

¹⁾ Poznamenejme, že zde hledáme rozklad platný pro **všechna** t reálná. Pokud by někdo namítl, že $t = x^2$ a není tedy možné dosazovat záporná čísla, pak na tuto namítku odpovíme, že pokud najdeme obecnější rovnost platnou pro **všechna** reálná čísla, pak jistě platí i pro všechna nezáporná reálná čísla — která již lze psát ve tvaru druhé mocniny x .

$$\stackrel{C}{=} x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1/2} \arctan \frac{x}{2} = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$(e) f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)}$$

Řešení:

Rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 + 1 = A(x - 1) + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme, že

$$2 = 4C \implies C = \frac{1}{2}$$

$$2 = -2A \implies A = -1$$

Nyní dosazením např. $x = 0$ dostaneme, že

$$1 = -A - B + C \implies B = -A + C - 1 = -(-1) + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Odtud máme:

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx = \int \left(\frac{-1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} \right) dx \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{1}{2} \ln|x - 1| = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1|$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$.

$$(f) f(x) = \frac{1}{x(1 + x)(1 + x + x^2)}$$

Řešení: Kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ nemá reálné kořeny. Proto rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x(1 + x)(1 + x + x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1 + x} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(1 + x)(1 + x + x^2) + Bx(1 + x + x^2) + (Cx + D)x(x + 1)$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme, že $A = 1$. Dosazením $x = -1$ dostaneme, že $B = -1$. Po dosazení a roznásobení dostaneme

$$1 = (1 + x)(1 + x + x^2) - x(1 + x + x^2) + (Cx + D)x(x + 1)$$

$$1 = 1 + x + x^2 + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2 + Dx$$

odkud vyplývá, že $D = -1$ a $C = 0$. Rozklad má tvar

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} dx &= \ln|x| - \ln|1+x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, 0), (0, \infty)$.

(g) $f(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2$

Řešení:

Nejprve najdeme rozklad jmenovatele. Platí, že

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Hledáme tedy rozklad výrazu

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Ten je potřeba obecně hledat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

Přenosobním jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-2)(x-1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = 2$ dostaneme, že

$$1 = A, \quad 4 = C$$

Zbylé koeficienty B, D určíme dosazením dvou libovolných hodnot, třeba $x = 0$ a $x = 3$. Dostaneme, že

$$0 = 4A - 4B + C - 2D = 4 - 4B + 4 - 2D \implies -8 = -4B - 2D$$

$$9 = A + 2B + 4C + 4D = 1 + 2B + 16 + 4D \implies -8 = 2B + 4D$$

Odtud snadno vyplývá, že $D = -4$ a $B = 4$. Odtud vyplývá:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx &= \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x-1} + 4 \ln|x-1| - \frac{4}{x-2} - 4 \ln|x-2| = -\frac{x-2+4(x-1)}{(x-1)(x-2)} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| = \\ &\quad -\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$.

(h) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$

Řešení:

Platí, že $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$. Druhý kvadratický trojčlen tedy nemá reálné kořeny, rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

dosazením $x = -1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Roznásobením pak dostaneme

$$1 = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

odkud ihned vyplývá, že $C = \frac{2}{3}$ (porovnání koeficientů absolutních členů) a $B = -\frac{1}{3}$ (porovnání koeficientů u druhé mocniny x). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{1}{x + 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x + 1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx - \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odkud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, \infty)$.

2. (a) $f(x) = -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

Řešení: Použijeme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1 + x^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} I_n.$$

Tedy $n = 1$ a

$$I_2 = \int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{x}{2(1 + x^2)^1} + \frac{2 - 1}{2} I_1.$$

Protože $I_1 \stackrel{C}{=} \arctan x$, máme

$$\int -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \stackrel{C}{=} -\frac{3}{16} \left(\frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right).$$

$x \in \mathbb{R}$

$$(b) f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Řešení: Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx$$

Převodeme na čtverec

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx$$

a použijeme lineární substituci $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = y$. Pak $\frac{2}{\sqrt{3}} dx = dy$ a dostaneme

$$\frac{16}{9} \int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^2} dx = \frac{16}{9} \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{[y^2 + 1]^2} dy.$$

Použijeme rekurentní vzorec jako v předchozím příkladě:

$$\frac{16}{9} \int \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{[y^2 + 1]^2} dy \stackrel{C}{=} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \right)$$

Vrátíme substituci

$$\begin{aligned} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2} \arctan y \right) &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2(1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2)} + \frac{1}{2} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$(c) f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Řešení:

Hledejme rozklad ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem a roznásobením dostaneme

$$x^2 = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)$$

$$x^2 = Ax^3 + 2Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + 2Bx + 2B + Cx + D$$

odkud vyplývá, že $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$ a $D = -2$. Hledaný rozklad má tvar

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \stackrel{C}{=} \arctan(x+1)$$

a

$$- \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{x^2+2x+2}$$

odkud máme, že

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx \stackrel{C}{=} \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

Řešení:

Zlomek již máme připraven ve tvaru vhodném k integraci. Použijeme rekurentní vzorec.

Máme

$$I_1 \stackrel{C}{=} \arctan x$$

a

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Tedy

$$I_2 = \frac{x}{2 \cdot 1(1+x^2)^1} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1} I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x.$$

Dále

$$I_3 = \frac{x}{2 \cdot 2(1+x^2)^2} + \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2} I_2 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x \right)$$

Závěr:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{8} \arctan x + \frac{3}{8} \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

Řešení: Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x^2+x+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2+3x-2 = A-C-E+2Ax-Bx-Dx+Ex+3Ax^2+Dx^2+2Ax^3+Cx^3+Ax^4+Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = -\frac{4}{9}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{3} \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x-1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x-1| \\ -\frac{2}{9} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx &= -\frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převodem jmenovatele na kanonický tvar $(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1]$ a substitucí $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = y$.)

$$\stackrel{C}{=} \frac{-1}{6} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{5}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \frac{5x+2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$x \in (-\infty, 1), x \in (1, \infty)$.

(f) $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

Řešení: Jmenovatel lze rozložit na součin kvadratických trojčlenů

$$(x^4 + x^2 + 1)^2 = (x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$$

Z toho vyplývá, že rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Kx+L}{x^2-x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}$$

Například metodou neurčitých koeficientů dostaneme, že

$$A = B = C = D = L = N = \frac{1}{4}, \quad K = M = -\frac{1}{4}$$

Integrací jednotlivých zlomků dostaneme po úpravách

$$\int \frac{1}{4} \frac{x+1}{x^2+x+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln(x^2+x+1)$$

$$\int \frac{1}{4} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12} \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$\int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{x^2-x+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \ln(x^2-x+1)$$

$$\int -\frac{1}{4} \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12} \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Sečtením a úpravami dostaneme, že

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{12\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

$x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$

Řešení: Platí, že

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Rozklad tedy musíme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

Přemnožením jmenovatelem dostaneme

$$1 = A(x+1)(x^2-x+1)^2 + B(x^2-x+1)^2$$

$$+ (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x^2-x+1)^2$$

Roznásobením pravé strany máme

$$1 = A+B+D+F - Ax - 2Bx + Cx + Dx + 2Fx + Ex + Ax^2 + 3Bx^2 + Cx^2 + Fx^2 + 2Ex^2 +$$

$$+ Ax^3 - 2Bx^3 + Dx^3 + Ex^3 - Ax^4 + Bx^4 + Cx^4 + Dx^4 + Ax^5 + Cx^5$$

odkud sestavíme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + D + F \\ 0 &= -A - 2B + C + D + E + 2F \\ 0 &= A + 3B + C + F + 2E \\ 0 &= A - 2B + D + E \\ 0 &= -A + B + C + D \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$A = \frac{2}{9}, \quad B = \frac{1}{9}, \quad C = -\frac{2}{9}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = -\frac{1}{3}, \quad F = \frac{1}{3}$$

a hledaný rozklad tedy má tvar

$$\frac{1}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2}{9} \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{9} \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{9} \frac{2x - 3}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Budeme integrovat zvlášť jednotlivé zlomky. Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{9} \frac{1}{x + 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{2}{9} \ln|x + 1| \\ \int \frac{1}{9} \frac{1}{(x + 1)^2} dx &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{9} \frac{1}{x + 1} \\ \int \frac{1}{9} \frac{2x - 3}{x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{1}{9} \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx - \int \frac{2}{9} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{4}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

a nakonec

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} dx - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{x^2 - x + 1} - \int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} dx \end{aligned}$$

Zbýlý integrál vypočteme pomocí substituce $y = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$:

$$\int \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{9\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18} \frac{(2x - 1)}{x^2 - x + 1}$$

Dáme-li jednotlivé výsledky dohromady, dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^3 + 1)^2} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{9(x + 1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{9} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^3 + 1} \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, 1), x \in (1, \infty)$.

(h) $f(x) = \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}$.

Řešení:

Provedme substituci $t = x^5$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} dx &\rightarrow \frac{1}{5} \int \frac{t}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t}{(t + 1)^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{2t + 2 - 2}{((t + 1)^2 + 1)^2} dt = \frac{1}{10} \int \frac{2t + 2}{((t + 1)^2 + 1)^2} dt - \frac{1}{5} \int \frac{1}{((t + 1)^2 + 1)^2} dt = \end{aligned}$$

Na oba integrály použijeme substituci $u = (t + 1)^2 + 1$. Dostaneme

$$\frac{1}{10} \int \frac{du}{u^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{10} \frac{1}{u} \rightarrow -\frac{1}{10} \frac{1}{(t+1)^2 + 1} = -\frac{1}{10} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} \rightarrow -\frac{1}{10} \frac{1}{x^{10} + 2x^5 + 2}$$

Druhý integrál

$$\begin{aligned} &\rightarrow -\frac{1}{10} \arctan(t+1) - \frac{1}{10} \frac{t+1}{(t+1)^2 + 1} \\ &\rightarrow -\frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1) - \frac{1}{10} \frac{x^5 + 1}{x^{10} + 2x^5 + 2} \end{aligned}$$

Dohromady

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{10} \frac{x^5 + 2}{x^{10} + 2x^5 + 2} - \frac{1}{10} \arctan(x^5 + 1).$$

$x \in \mathbb{R}$

Zkouškové příklady

Příklady i s řešením máme od doc. Rokyty <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html>

3. (a) $f(x) = \frac{\log^2 x + \log x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)}$

Řešení: Nejprve substituujeme: $y = \log x$, $dy = \frac{1}{x} dx$, $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$, $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$.

Dostaneme

$$\int \frac{y^2 + y + 1}{y^2 - y + 1} dy$$

Zkontrolujeme stupeň polynomů a podělíme:

$$\int \frac{y^2 + y + 1}{y^2 - y + 1} dy = \int 1 + \frac{2y}{y^2 - y + 1} dy = y + \int \frac{2y - 1}{y^2 - y + 1} dy + \int \frac{1}{y^2 - y + 1} dy.$$

První integrál:

$$\int \frac{2y - 1}{y^2 - y + 1} dy = \log |y^2 - y + 1| + c$$

Druhý integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 - y + 1} dy &= \int \frac{1}{(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dy = \int \frac{4}{3} \frac{1}{\left(\frac{y - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1} dy = \int \frac{4}{3} \frac{1}{\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2(y - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dohromady

$$\int \frac{\log^2 x + \log x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)} dx \stackrel{C}{=} \log x + \log(\log^2 x - \log x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \log x - 1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (0, \infty)$

$$(b) f(x) = \frac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2(e^x + 1)^2}$$

Řešení: Aplikujeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x dx$. Intervaly $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$, $(a, b) = (-1, \infty)$, $e^x((-\infty, \infty)) = (0, \infty) \subset (a, b)$.

Dostaneme

$$\int \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2} dy$$

Rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2} dy &= \int \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{4}{y+2} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{4}{y+1} dy \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{4}{y+2} + 4 \log|y+2| - \frac{1}{y+1} - 4 \log|y+1| \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$(c) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+3)(x^2 + 2x + 3)}$$

Řešení: Rozložíme na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(x+3)(x^2 + 2x + 3)} dx &= \int \frac{\frac{7}{6}}{x+3} + \frac{-\frac{1}{6}x - \frac{5}{6}}{x^2 + 2x + 3} dx \\ &= \frac{7}{6} \log|x+3| - \frac{1}{12} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx \end{aligned}$$

První integrál:

$$-\frac{1}{12} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{12} \log(x^2 + 2x + 3)$$

Druhý integrál:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx \\ &= -\frac{2}{6} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dohromady

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+3)(x^2 + 2x + 3)} dx \stackrel{C}{=} \frac{7}{6} \log|x+3| - \frac{1}{12} \log(x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

$x \in (-\infty, -3), (3, \infty)$

$$(d) f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 12x + 13}{(1+x)(x^2 + x + 3)^2}$$

Řešení: Rozložíme na parciální zlomky:

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 12x + 13}{(1+x)(x^2 + x + 3)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2 + x + 3} + \frac{x+1}{(x^2 + x + 3)^2} dx$$

Jednotlivé integrály:

$$\int \frac{1}{x+1} dx \stackrel{C}{=} \log|x+1|$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 + x + 3} dx &= \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}} dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}} \\
\int \frac{x + 1}{(x^2 + x + 3)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 3)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 3)^2} dx \\
&= -\frac{\frac{1}{2}}{(x^2 + x + 3)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4})^2} dx \\
&= -\frac{\frac{1}{2}}{(x^2 + x + 3)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{121} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\right)^2 + 1\right)^2} dx
\end{aligned}$$

Poslední integrál vyřešíme substitucí a rekurentním vzorcem. Pak

$$\int \frac{x + 1}{(x^2 + x + 3)^2} dx = \frac{1}{11} \cdot \frac{x - 5}{(x^2 + x + 3)} + \frac{2}{121} \sqrt{11} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}}$$

Závěr:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 12x + 13}{(1 + x)(x^2 + x + 3)^2} dx \\
&\stackrel{C}{=} \log |x + 1| + \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{11} \cdot \frac{x - 5}{(x^2 + x + 3)} + \frac{2}{121} \sqrt{11} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}} \\
&= \log |x + 1| + \frac{1}{11} \cdot \frac{x - 5}{(x^2 + x + 3)} + \frac{24}{11\sqrt{11}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}}
\end{aligned}$$

pro $x \in (-\infty, -1), (-1, \infty)$.

(e) $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 3)}$

Řešení: Zkontrolujeme stupně polynomů a podělíme

$$\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 3)} dx = \int x - 1 + \frac{-x^2 + 2x + 4}{(x + 1)(x^2 + x + 3)} dx$$

Po rozkladu na parciální zlomky:

$$= \int x - 1 + \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} + \frac{-\frac{4}{3}x + 1}{(x^2 + x + 3)} dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \log |x + 1| + \int \frac{-\frac{4}{3}x + 1}{(x^2 + x + 3)} dx$$

Poslední integrál:

$$\begin{aligned}
\int \frac{-\frac{4}{3}x + 1}{(x^2 + x + 3)} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3} dx + \frac{11}{3} \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}} dx \\
&= -\frac{2}{3} \log(x^2 + x + 3) + \frac{2\sqrt{11}}{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}}
\end{aligned}$$

Závěr:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 3)} dx \stackrel{C}{=} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \log |x + 1| - \frac{2}{3} \log(x^2 + x + 3) + \frac{2\sqrt{11}}{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}}$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, \infty)$