



## 9. cvičení – Parciální zlomky

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

Označme

$$I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Pak

$$I_1 \stackrel{C}{=} \arctan x, \quad I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

### Algoritmus

1. Zkontrolujeme **stupně** polynomů, případně podělíme.
2. **Rozložíme jmenovatele** na závorky (pro vyšší stupně polynomů: typicky zkusíme uhodnout kořen a pak podělíme mnohočleny).
3. Zkontrolujeme, zda nejdou **rozložit kvadratické trojčleny**.
4. **Rozložíme** na parciální zlomky.
5. **Zintegrujeme**.
6. Napíšeme **podmínky** a určíme **otevřené intervaly**.

### Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. (a)  $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

(b)  $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$

(c)  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

(d)  $\otimes f(x) = \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}$

2. (a)  $f(x) = -\frac{3}{16} \frac{1}{(x^2+1)^2}$

(b)  $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

(c)  $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$

(d)  $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$

(e)  $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$

(f)  $f(x) = \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

(g)  $f(x) = \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2$

(h)  $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

(e)  $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

(f)  $\otimes f(x) = \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

(g)  $f(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$

(h)  $\ast f(x) = \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$

### Zkouškové příklady

Příklady i s řešením máme od doc. Rokyty: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html>

3. (a)  $f(x) = \frac{\log^2 x + \log x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)}$  (d)  $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 12x + 13}{(1+x)(x^2+x+3)^2}$   
(b)  $f(x) = \frac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2(e^x + 1)^2}$  (e)  $f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2+x+3)}$   
(c)  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+3)(x^2 + 2x + 3)}$



(1d) pro rozklad (pro integraci nel) uvažujte  $t = x^2$   
(2f) pro rozklad hledejte  $x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ , roznásojte a porovnávejte člen po členu  
(2h) substituce  $t = x^2$