



## 8. cvičení – 2. věta o substituci

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Příklady

Určete primitivní funkci k funkci  $f(x)$  na všech intervalech, kde PF existuje.

1. (a)  $f(x) = |x|$

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0), \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^2}{2} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty  $c_1$  a  $c_2$  tak, aby  $F$  byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^2}{2} + c_1 = c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} + c_2 = c_2$$

Dostáváme

$$c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ c_1, & x = 0, \\ \frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(b)  $f(x) = \max\{1, x^2\}$

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, -1), \\ 1, & x \in (-1, 1), \\ x^2, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + c_1, & x \in (-\infty, -1), \\ x + c_2, & x \in (-1, 1), \\ \frac{x^3}{3} + c_3, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty  $c_1$ ,  $c_2$  a  $c_3$  tak, aby  $F$  byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{3} + c_1 = -\frac{1}{3} + c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow -1+} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} x + c_2 = -1 + c_2$$

Dostáváme

$$c_1 = -\frac{2}{3} + c_2.$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow 1+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3}{3} + c_3 = \frac{1}{3} + c_3$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 1-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x + c_2 = 1 + c_2$$

Dostáváme

$$c_3 = \frac{2}{3} + c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + c_2, & x \in (-\infty, -1), \\ -1 + c_2, & x = -1, \\ x + c_2, & x \in (-1, 1), \\ 1 + c_2, & x = 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + c_2, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(c)  $f(x) = \sqrt{x^6}$

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , má tam tedy primitivní funkci.

Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \in (-\infty, 0), \\ x^3, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^4}{4} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty  $c_1$  a  $c_2$  tak, aby  $F$  byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^4}{4} + c_2 = c_2$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 0-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} -\frac{x^4}{4} + c_1 = c_1$$

Dostáváme

$$c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ c_1, & x = 0, \\ \frac{x^4}{4} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(d)  $f(x) = e^{-|x|}$

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0), \\ e^{-x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ -e^{-x} + c_2, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Najdeme konstanty  $c_1$  a  $c_2$  tak, aby  $F$  byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x + c_1 = 1 + c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{-x} + c_2 = -1 + c_2$$

Dostáváme

$$2 + c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ 1 + c_1, & x = 0, \\ -e^{-x} + 2 + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(e)  $f(x) = |\sin x|$

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ -\sin x, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \cos x + B_k, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty  $A_k$  a  $B_k$  tak, aby  $F$  byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^+} -\cos x + A_k = -1 + A_k.$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (0+2k\pi)^-} \cos x + B_{k-1} = 1 + B_{k-1}.$$

Dostáváme

$$-1 + A_k = 1 + B_{k-1}.$$

Analogicky

$$\lim_{x \rightarrow (\pi+2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi+2k\pi)^+} \cos x + B_k = -1 + B_k.$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} -\cos x + A_k = 1 + A_k.$$

Dostáváme

$$1 + A_k = -1 + B_k.$$

Dohromady

$$\begin{aligned} B_{k-1} + 2 &= A_k \\ B_k &= 2 + A_k \\ B_k &= 4 + B_{k-1} \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} B_k &= B_0 + 4k \\ A_k &= B_0 + 4k - 2 \end{aligned}$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} B_0 + 4k - 3, & x = 0 + 2k\pi, \\ -\cos x + B_0 + 4k - 2, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ 4k - 1 + B_0, & x = \pi + 2k\pi, \\ \cos x + 4k + B_0, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

(f)  $f(x) = |\sin x + \cos x|$

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sin x - \cos x, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + \sin x + A_k, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ \cos x - \sin x + B_k, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty  $A_k$  a  $B_k$  tak, aby  $F$  byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} \cos x - \sin x + B_{k-1} = \sqrt{2} + B_{k-1}$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} -\cos x + \sin x + A_k = -\sqrt{2} + A_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + B_{k-1} = -\sqrt{2} + A_k$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} -\cos x + \sin x + A_k = \sqrt{2} + A_k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} \cos x - \sin x + B_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dohromady

$$2\sqrt{2} + B_{k-1} = A_k$$

$$2\sqrt{2} + A_k = B_k$$

$$4\sqrt{2} + B_{k-1} = B_k$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -3\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ -\cos x + \sin x - 2\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ \cos x - \sin x + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

(g)  $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

**Řešení:** Funkce  $f(x)$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , má tam tedy primitivní funkci.

Rozepíšeme

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x|$$

Tedy

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - \sin x, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\cos x + \sin x, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + A_k, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sin x - \cos x + B_k, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty  $A_k$  a  $B_k$  tak, aby  $F$  byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^-} -\sin x - \cos x + B_{k-1} = \sqrt{2} + B_{k-1}$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)^+} \sin x + \cos x + A_k = -\sqrt{2} + A_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + B_{k-1} = -\sqrt{2} + A_k$$

Dále

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^-} \sin x + \cos x + A_k = \sqrt{2} + A_k$$

a

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)^+} -\sin x - \cos x + B_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dohromady

$$2\sqrt{2} + B_{k-1} = A_k$$

$$2\sqrt{2} + A_k = B_k$$

$$4\sqrt{2} + B_{k-1} = B_k$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -3\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ \sin x + \cos x - 2\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sqrt{2} + k4\sqrt{2} + B_0, & x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ -\sin x - \cos x + k4\sqrt{2} + B_0, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

2. Směs

(a)  $f(x) = \sin \sqrt{x}$

**Řešení:** Zvolme substituci  $y = \sqrt{x}$ . Intervaly  $x \in (0, \infty)$ ,  $y \in (0, \infty)$ . Pak  $y^2 = x$  a  $2y \, dy = dx$ . Potom

$$\int \sin \sqrt{x} \, dx \rightarrow \int 2y \sin y \, dy$$

Tento integrál vyřešíme pomocí per partes, zvolíme  $v = 2y$ ,  $u' = \sin y$ . Pak  $v' = 2$ ,  $u = -\cos y$ . Máme

$$\int 2y \sin y \, dy = -2y \cos y + 2 \int \cos y \, dy = -2y \cos y + 2 \sin y + c$$

Zpětně zasubstituuje a dostaneme

$$\int \sin \sqrt{x} \, dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c.$$

(b)  $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$

**Řešení:** Substitute  $y = \sqrt{4x-7}$ . Intervaly  $x \in (\frac{7}{4}, \infty)$ ,  $y \in (0, \infty)$ .

Pak  $(y^2+7)/4 = x$  a  $y/2 \, dy = dx$ . Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3} \, dx &\rightarrow \int \frac{5}{y+3} \frac{y}{2} \, dy = \frac{5}{2} \int \frac{y}{y+3} \, dy = \frac{5}{2} \int 1 - \frac{3}{y+3} \, dy = \\ &\frac{5}{2}(y - 3 \ln |y+3|) + c \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \frac{5}{2}(\sqrt{4x-7} - 3 \ln |\sqrt{4x-7}+3|) + c \end{aligned}$$

(c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \sqrt{1+e^x}$ . Intervaly  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in (1, \infty)$ . Pak  $e^x = y^2 - 1$ , tedy  $x = \ln(y^2 - 1)$ . Dopočteme  $dx = \frac{2y}{y^2-1} \, dy$ . Odtud máme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \, dx &\rightarrow \int \frac{1}{y} \frac{2y}{y^2-1} \, dy = 2 \int \frac{1}{y^2-1} \, dy \stackrel{C}{=} \ln \left| \frac{1-y}{1+y} \right| \\ &\rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}} \right| \end{aligned}$$

$$(d) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

**Řešení:** Zvolme substituci  $y = \sqrt[6]{x}$ . Intervaly  $x \in (0, \infty)$ ,  $y \in (0, \infty)$ . Pak  $y^6 = x$  a  $6y^5 dy = dx$ . Máme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx \rightarrow \int \frac{y^3}{1 + y^2} 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^8}{1 + y^2} dy =$$

Provedeme dělení mnohočlenů a získáme

$$6 \int \frac{y^8}{1 + y^2} dy = 6 \int y^6 - y^4 + y^2 - 1 + \frac{1}{1 + y^2} dy = 6 \left( \frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} - y + \arctan y \right) + c$$

Vrátíme substituci:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = 6 \left( \frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{1/2}}{3} - x^{1/6} + \arctan x^{1/6} \right) + c$$

### 3. Goniometrické substituce

$$(a) f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

**Řešení:** Zvolme substituci  $x = 2 \cos t$ . Pak  $dx = -2 \sin t dt$  a  $4 - x^2 = 4(1 - \cos^2 t) = 4 \sin^2 t$ . Intervaly budou:  $t \in (0, \pi)$ , pak  $x \in (-2, 2)$ . Navíc  $-2 \sin t \neq 0$  na  $(0, \pi)$  a funkce  $2 \cos t$ ,  $t \in (0, \pi)$  je na (surjekce). Dostáváme

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx \rightarrow \int \sqrt{4 \sin^2 t} (-2 \sin t) dt = \int -4 |\sin t| \sin t dt$$

Protože jsme na intervalu  $(0, \pi)$ , tak  $|\sin t| = \sin t$  a

$$\int -4 |\sin t| \sin t dt = -4 \int \sin^2 t dt.$$

Poslední integrál lze vyřešit per partes nebo přepisem  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ . Pak

$$-4 \int \sin^2 t dt = -4 \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -4 \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) + c$$

Celkem tedy pro  $x \in (-2, 2)$  máme

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = -4 \left( \frac{\arccos(x/2)}{2} - \frac{\sin(2 \arccos(x/2))}{4} \right) + c$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

**Řešení:** Definiční obor funkce  $f$  je interval  $(-1, 1)$ , stačí tedy určit primitivní funkci na tomto intervalu. Provedeme substituci  $x = \sin t$ . Protože  $x \in (-1, 1)$ , je  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Potom

$$dx = \cos t dt,$$

a protože  $\cos t > 0$  pro  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , podle druhé věty o substituci máme

$$\int \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} dx \rightarrow \int \frac{1}{(1 - \sin^2 t)^{3/2}} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^3 t} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \stackrel{C}{=} \tan t$$

a s přihlédnutím k tomu, že pro  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  je  $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ , dostaneme

$$= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(c)  $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ ,  $a > 0$

**Řešení:** Z podmínek na integrand máme  $x \in (-a, a)$ . Použijeme substituci  $x = a \sin t$ . Intervaly budou  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Navíc  $dx = a \cos t dt$ .

Potom

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int a \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cos t dt \rightarrow \int a \sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \\ &= \int a(1+\sin t) dt \stackrel{C}{=} at - a \cos t \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

(d)  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ ,  $a > 0$

**Řešení:** Lze použít substituci  $a \sinh t$ , ale ukážeme si jiný postup, použijeme substituci  $x = a \operatorname{tg} t$ . Intervaly:  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Potom  $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$  a s přihlédnutím ke vztahu  $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$  platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &\rightarrow \int \frac{1}{a^3 \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{a^2} \cos t dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{a^2} \sin t \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \end{aligned}$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} \rightarrow \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \implies \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}$$

#### 4. Hyperbolické:

(a)  $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $a > 0$

**Řešení:** Použijeme substituci  $x = a \sinh t$ . Intervaly:  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ . Potom  $dx = a \cosh t dt$  a platí

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &\rightarrow \int a^2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (t + \cosh t \sinh t) \\ \rightarrow \int f(x) dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

Integrál  $\int \cosh^2 t$  lze spočítat rozepsáním do  $\int \frac{1}{4}(e^{-2t} + e^{2t} + 2)$ , pomocí per partes nebo pomocí vzorce  $\cosh^2 t = (1 + \cosh(2t))/2$ .



(b)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}, a > 0$

**Řešení:** Použijeme substituci  $x = a \sinh t$ . Intervaly  $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ . Potom  $dx = a \cosh t dt$  a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \rightarrow \int \frac{a^2 \sinh^2 t}{a \cosh t} a \cosh t dt = a^2 \int \sinh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} [t - \sinh t \cosh t]$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} \arg \sinh \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2}$$

(c)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

**Řešení:** Provedeme substituci  $x = \sqrt{2} \cosh t$ . Intervaly:  $x \in (\sqrt{2}, \infty), t \in (0, \infty)$ . Potom  $dx = \sqrt{2} \sinh t dt$  a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx \rightarrow \int \frac{2 \cosh^2 t}{\sqrt{2} \sinh t} \sqrt{2} \sinh t dt = \int 2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} (t + \sinh t \cosh t)$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \arg \cosh \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \stackrel{C}{=} \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2}$$

Pro  $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$ , uvažujme substituci  $x = -\sqrt{2} \cosh t, t \in (0, \infty)$ . Pak

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx \rightarrow \int \frac{2 \cosh^2 t}{\sqrt{2} \sqrt{\sinh^2 t}} (-\sqrt{2} \sinh t) dt = - \int 2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} - (t + \sinh t \cosh t)$$

Vyjádříme  $-\frac{x}{\sqrt{2}} = \cosh t$ , tedy  $t = \arg \cosh -\frac{x}{\sqrt{2}}$ .

Navíc  $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$ , tedy  $|\sinh t| = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$ .

Tedy

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx \stackrel{C}{=} - \arg \cosh -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \stackrel{C}{=} - \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2}$$

(d)  $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$

**Řešení:**

Použijeme substituci  $x = a \cosh t$ . Pracujeme na intervalech  $x \in (a, \infty)$  a  $t \in (0, \infty)$ .

Potom  $dx = a \sinh t dt$  a platí

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \rightarrow \int a^2 \sinh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (\cosh t \sinh t - t)$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} a^2 \arg \cosh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Pro interval  $x \in (-\infty, -a)$  uvažujme substituci  $x = -a \cosh t$  a  $t \in (0, \infty)$ . Pak dostaneme

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx \rightarrow \int -a^2 \sinh^2 t \, dt \stackrel{C}{=} -\frac{a^2}{2} (\cosh t \sinh t - t)$$

Vyjádříme  $-\frac{x}{a} = \cosh t$ , tedy  $t = \arg \cosh -\frac{x}{a}$ .

Navíc  $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$ , tedy  $|\sinh t| = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$ .

Tedy

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} \arg \cosh -\frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}$$

Jiný přístup pro  $x \in (-\infty, -a)$ : Lze ukázat, že jestliže  $f$  je sudá, tak lze najít primitivní funkci  $F(x)$ , která bude lichá. (Pozor, obecně jakákoli taková  $F$  lichá být nemusí, záleží na konstantě  $+C$ .) Pak stačí vyjádřit  $F$  tak, aby byla lichá.