# 8. cvičení – 2. věta o substituci

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Teorie

**Věta 1.** Nechť $f$ je **spojitá** funkce na otevřeném intervalu $I$. Potom $f$ má na $I$ primitivní funkci.

**Věta 2.** Nechť $f, F$ jsou **spojité** funkce na otevřeném intervalu $I$. Nechť $c \in I$ a nechť navíc $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na $I$.

**Věta 3** (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$. Nechť $\varphi$ je funkce definovaná na intervalu $(\alpha, \beta)$ s hodnotami v $(a, b)$, která má v každém bodě $(\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

**Věta 4** (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě **nenulovou vlastní** derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $(a, b)$ a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

## Algoritmus pro lepení

1. **Zintegrujeme** funkci **zvlášť** na každém intervalu, kde to umíme. (Intervaly nám dá předpis funkce, odmocnina, absolutní hodnota, max/min, sgn, Věta o substituci…)
2. Zkontrolujeme, na jakém otevřeném intervalu je funkce $f$ **spojitá** - tam budeme hledat PF. Najdeme body, kde se funkce musí slepit.
3. Spočteme **limity** zleva a zprava a upravíme jednotlivé **konstanty** tak, aby výsledek byl spojitý.
4. Aplikujeme větu 1 - ta říká, že jsme to slepili správně.

## Hinty

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{arg\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \operatorname{arg\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{arg\,cosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \operatorname{arg\,coth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

## Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. (a) $f(x) = |x|$
   (b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$
   (c) $f(x) = \sqrt{x^6}$
   (d) $f(x) = e^{-|x|}$
   (e) $f(x) = |\sin x|$
   (f) $f(x) = |\sin x + \cos x|$
   (g) ♣ $f(x) = \sqrt{1-\sin 2x}$

2. ❄ Směs

   (a) $f(x) = \sin\sqrt{x}$
   (b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$
   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

3. ❀ Goniometrické substituce

   (a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$
   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$, $a > 0$
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$, $a > 0$

   **Bonus**

4. ♡ Hyperbolické:

   (a) $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}$, $a > 0$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a > 0$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$
   (d) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$, $a > 0$

(1g) $\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x} = |\cos x - \sin x|$

(2a) $y\sqrt{x}$, tedy $y^2 = x$
(2b) $y = \sqrt{4x-7}$, tedy $x = (y^2+7)/4$
(2c) $y = \sqrt{1+e^x}$, tedy $x = \ln(y^2-1)$
(2d) $y = \sqrt[6]{x}$, tedy $y^6 = x$

(3a) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
(3b) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
(3c) $x = a\sin t$ nebo...
(3d) $x = a\sinh t$ nebo $a\tan t$

(4a) $x = a\sinh t$
(4b) $x = a\sinh t$
(4c) $x = \sqrt{2}\cosh t$
(4d) $x = a\cosh t$